KK 479

# Sammlung
## verschiedener Aufgaben
## der
# Geometrie
aufgelöst und bewiesen

durch die

algebraische Analysis;

als

weitere Ausführung

zu

## Lacroix's Trigonometrie

und

## höhern Geometrie

von

Louis Pouissant,

Professor der Mathematik.

---

Aus dem Französischen übersetzt

von

E. M. Hahn,

Königl. Preuß. Kammerkondukteur.

---

Berlin, 1806.

In der Frölichschen Buchhandlung.

Kern-Kernried'sche
Stiftungsbibliothek
- Augsburg -

Sr. Hochwohlgebohren

dem Herrn

# Christian Maximilian Baron von Bergh,

Chur-Hessischem Major und Hofkavalier Ihrer Königl. Hoheit der verwittweten Prinzessin Heinrich von Preußen

als Beweis

der

innigsten Hochachtung und Freundschaft

gewidmet

vom Uebersetzer.

# Vorrede.

Ueber den Zweck, den ich bey Uebersetzung des Werks von Lakroix vor Augen gehabt, habe ich mich hinlänglich in der Vorrede zur Algebra erklärt. Aufgemuntert von dem gütigen Beyfall, den mein Unternehmen sowohl als meine Arbeit in den gelehrten Zeitungen erhielten, faßte ich den Entschluß, das ganze Werk baldmöglichst meinem Vaterlande brauchbar zu machen, und, wo mich nicht Berufsgeschäfte davon abhalten, sollen nächstens die An-

fangsgründe der Differential- und Integralrechnung, mit möglichstem Fleiße ausgearbeitet erscheinen. Ob nun gleich gegenwärtiges Werkchen nicht denselben Verfasser hat, so glaube ich, daß es nichts desto weniger als zu diesem Werke gehörig angesehen, und auf deutschen Boden verpflanzt zu werden verdient. Die Worte Lacroix's mögen mich der ihm gebührenden Anpreisung überheben.

„Wenn man anders, sagt er *), um mit meinem Werke vertraut zu werden, eines Commentars „bedürfen sollte, so würde ich das Werk von Puissant vorschlagen. Dieser geschickte Professor, „der mit ausgezeichneten Talenten Wohlanständigkeit verbindet, hat sein Werk mit elegant aufgelösten Aufgaben angefüllt, welche den Zöglingen,

*) Dessen Vorrede zur Trigonometrie und höhern Geometrie.

„die sich üben wollen, von großem Nutzen seyn kön„nen.“

In der That biethet dem denkenden mit Lacroix's Werke vertrauten Leser, die Auflösung jeder einzelnen Aufgabe ein neues Feld von Erweiterungen dar, indem bey jeder derselben der Nutzen der analytischen Methode vor Augen gelegt wird, und dadurch leicht abgenommen werden kann, wie man sich bey jeder andern Aufgabe zu verhalten habe.

Wenn ich aber von der Gemeinnützigkeit dieses Werks rede, so will ich doch keineswegs dem kürzlich unter fast gleichem Titel aber in verschiedener Absicht von Meyer Hirsch aufgesetzten Werke seinen innern Werth und seine allgemeine Brauchbarkeit absprechen. Dieser talentvolle Mann hat sich in der That durch sein angefangenes Unternehmen verdient gemacht, und jeder, dem die Ausbreitung und Erweiterung der Mathematik am Herzen liegt,

wird gewiß mit mir den Wunsch hegen, daß es ihm gelingen möge, seine ferneren Arbeiten eben so planmäßig und durchdacht auszuführen.

Ich schließe mit dem Wunsche, daß diese Schriften in Deutschland eben den Nutzen verbreiten mögen, als sie schon in Frankreich gethan.

Berlin im May 1806.

Hahn.

# Vorbericht.

Nachdem der Verfasser des neuen Lehrbegriffs der Differential- und Integralrechnung die Anwendung der Algebra auf die Geometrie unter einer rein analytischen Form dargestellt hat, glaubte ich, daß es jungen Meßkünstlern angenehm seyn wird, über diesen Gegenstand einige Auseinandersetzungen gegeben zu haben, welche in einem, gänzlich der Theorie gewidmeten Werke, keinen Platz finden konnten. Ich habe daher eine Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen der Geometrie aufgesetzt, deren Auflösungen oder deren Beweise unmittelbar von den in den Anfangsgründen der Anwendung der Algebra auf die Geometrie und der höhern Geometrie von Lacroix auf einer sehr lichtvollen Art auseinander gesetzten Prinzipien abhängen. Wahr ist es, daß manche der Aufgaben, welche den Gegenstand meiner Arbeit ausmachen, nicht allgemein brauchbar sind; da indessen einige derselben vormals sehr berühmt waren, und andre

wenig bekannt sind, so kann es nicht fehlen, daß sie die Neugierde der Leser reitzen, und selbst ihren Verstand schärfen. Ich habe besonders gestrebt nie meine Rechnungen auf geometrische Constructionen zu gründen, welche nicht wesentlich aus der Natur der Sätze hergeleitet werden können, um den Nutzen der Algebra desto mehr hervorstechen zu lassen; und hiervon kann man sich überzeugen, wenn man das von mir gebrauchte einfache Verfahren mit den verschiedenen synthetischen Mitteln vergleicht, deren man sich bisher bey der Auslösung der Aufgaben bedient hat. „Es giebt, sagt Lacroix, eine Art, die „Geometrie zu berücksichtigen, welche man die ana„lytische Geometrie nennen könnte, und welche „darin bestehen würde, die Eigenschaften der Aus„dehnung aus der möglichst kleinsten Anzahl von „Prinzipien, und durch wirklich analytische Metho„den herzuleiten.“ Wirklich streben auch auch alle Betrachtungen dieses gelehrten Verfassers nach diesem Zwecke. Wenn ich auch zu der von ihm auseinandergesetzten Theorie nichts neues hinzugefügt, so habe ich wenigstens getrachtet, die Kenntniß derselben durch ausgesuchte Anwendungen zu verbreiten.

# Inhalt.

## Erster Abschnitt.

## Von der analytischen Trigonometrie.

Seite

Fundamentalgleichungen, aus denen die Auflösung aller Aufgaben der ebnen Trigonometrie hergeleitet werden — — — — — — 1

Grundregel der Auflösung der rechtwinklichten Dreyecke 2

Formeln, welche mit den verschiedenen Fällen der schiefwinklichten Dreyecke übereinkommen — — 4

Von den verschiedenen Veränderungen, welche die Gleichungen der geraden Linie und der Curven der zweyten Ordnung erleiden, wenn man die Axen der Coordinaten berücksichtigt, auf welche diese Linien zurückgeführt werden können.

Die Lage einer geraden gegen die Axen der Coordinaten hängt von den Zeichen und dem Werthe der beständigen Coefficienten ab, welche in ihrer Gleichung vorkommen — — — — — 9

Gleichung einer Geraden, welche unterworfen ist, durch einen gegebenen Punct zu gehen — — — 9

Seite

Gleichungen der einander parallelen Geraden — 10

Bedingung, welche erforderlich ist, damit zwey Gerade auf einander senkrecht seyen — — — — 10

Ausdruck für die Länge der von einem gegebenen Puncte auf eine bekannte Gerade gefällten senkrechten — 10

Jede zwey sich schneidende Linien haben in ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte dieselben Coordinaten 10

Ausdrücke der Sinus, Cosinus und Tangenten des von zweyen Geraden, deren Gleichungen bekannt sind, gebildeten Winkels — — — — — 10

Allgemeine und besondre Gleichungen des Kreises für rechtwinklichte Coordinaten — — — — 11

Allgemeine und besondre Gleichungen der Curven der zweyten Ordnung — — — — — — 12

## Allgemeine Methode, den Curven Tangenten zu führen.

Aufgabe. Wenn ein Punct gegeben ist, die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch diesen Punct geht, und welche unterworfen ist, eine der Art und Lage nach in einer Ebne gegebene Curve zu berühren — — 13

Gleichung der Tangente der Parabel — — 14

Gleichungen der Tangenten bey der Ellipse und beym Kreise, wenn die Abcissen vom Mittelpuncte aus gerechnet werden — — — — — — — 16

Gleichungen der Tangente eines Kegelschnitts, wenn der Punct, durch welchen diese Tangente gehen soll, auf der Curve gegeben ist — — — — — — 17

Seite

Die Gleichung der Tangenten in Rücksicht auf die Durchmesser der Curven der zweyten Ordnung ist von derselben Form, wie die in Rücksicht der Axen — 18

Zweyter Abschnitt.

## Von den bestimmten Aufgaben und einigen Lehrsätzen der Geometrie.

Aufgabe. Die Beziehung zu finden, welche zwischen der vom Scheitel eines Dreyecks nach der Mitte der Basis geführten Geraden, und den drey Seiten dieses Dreyecks anzutreffen ist — — — — — — 19

Aufgabe. Wenn die aus den Winkeln eines Dreyecks nach der Mitte der gegenüberstehenden Seiten gezogenen drey Linien gegeben sind, den analytischen Ausdruck dieser Seiten zu finden — — — — — 22

Lehrsatz. Wenn man aus den Scheiteln der Winkel irgend eines geradlinigten Dreyecks auf die gegenüberstehenden Seiten senkrechte Linien fällt, so werden sich alle diese drey senkrechte in einem und demselben Puncte schneiden — — — — — — 23

Lehrsatz. Wenn man aus der Mitte einer jeden Seite eines Dreyecks nach den Scheiteln der gegenüberstehenden Winkel gerade Linien zieht, so werden diese Geraden einander in einem und demselben Puncte schneiden 24

Dieser Lehrsatz ist nur ein besondrer Fall eines weit allgemeinern Satzes, der noch nirgends angemerkt worden 26

Lehrsatz. In jedem ebnen Vierecke ist die Summe der

Seite

Quadrate der vier Seiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen, nebst dem vierfachen Quadrate der Linie, welche die Mitten dieser Diagonalen verbindet 27

Lehrsatz. Wenn zwey Vierecke gleiche Diagonalen haben, und mit einander einerley Winkel einschließen, auf welche Art sie auch einander schneiden mögen, so sind diese Vierecke einander gleich — — — — 29

Aufgabe. Wenn einer der spitzen Winkel eines rechtwinklichten Dreyecks gegeben ist, die Lage der Hypothenuse zu finden, so daß dieses Dreyeck einem gegebenen Quadrate gleich sey — — — — — 30

Aufgabe. Durch einen der Lage nach gegen einen bekannten Winkel gegebenen Punct, in diesem Winkel eine Gerade dergestalt zu legen, daß das erfolgende Dreyeck einem gegebenen Quadrate gleich sey — — 31

Construction der Formel in Beziehung auf diese Aufgabe 31

Aufgabe. Wenn ein Kreis von einem bekannten Halbmesser und eine Gerade der Lage nach gegen zwey feste Axen gegeben sind, dem Kreis eine Tangente zu führen, welche zugleich der gegebenen Geraden parallel sey 32

Geometrische Construction, auf welche die Auflösung dieser Aufgabe führt — — — — — 34

Aufgabe. Zweyen der Größe und Lage nach in einer Ebne gegebenen Kreisen eine gemeinschaftliche Tangente zu führen — — — — — — 37

Aufgabe. Wenn zwey Kreise der Größe und Lage nach gegeben sind, durch dieselbe eine Gerade dergestallt zu

Seite

ziehen, daß die dazwischen liegenden Theile einander, und einer gegebenen Linie gleich seyen — — 39
Geometrische Auflösung dieser Aufgabe — — 39
Analytischer Ausdruck einer in den Kreis durch den äußersten Punct des Durchmessers geführten Sehne — 39
Lehrsatz. Wenn man durch den Berührungspunct zweyer gegebenen Kreise in den größern Kreis nach Belieben zwey Sehnen zieht, so werden diese vom Umkreise des kleinern Zirkels in proportionale Theile geschnitten 42
Dieser Lehrsatz führt auf die Auflösung einer Aufgabe, worin man sich vorlegt, einen Kreis zu beschreiben, welcher einen andern gegebenen Kreis berühre, und durch zwey gegebene Puncte gehe — — — 43
Aufgabe. Wenn ein Kreis der Größe und Lage nach in einem bekannten Winkel gegeben ist, den Mittelpunct eines Kreises zu finden, welcher die Schenkel des gegebenen Winkels und den gegebenen Kreis zugleich berühre — — — — — — — 43
Auflösung dieser Aufgabe durch Construction — 44
Aufgabe. Ein Trapezium durch eine beyden Grundlinien parallele Linie zu halbiren — — — — 45
Aufgabe. Ein schiefwinklichtes Dreyeck durch zwey einander unter rechten Winkeln schneidende Linien in vier gleiche Theile zu theilen — — — — 47
Auflösung dieser Aufgabe durch Construction — 48
Lehrsatz. Wenn drey ungleiche Kreise der Größe und Lage nach in einer Ebne gegeben sind, so werden, wenn man

Seite

je zweyen und zweyen derselben außerhalb liegende gemeinschaftliche Tangenten führt, die drey auf diese Art erhaltenen Durchschnittspuncte in einerley geraden Linie liegen — — — — — — 50

Neue Folgerungen, welche man aus dem Beweis dieses Satzes ziehen kann — — — — — 51

Lehrsatz. Wenn man aus einer beliebigen Anzahl Puncten einer der Lage nach gegen eine bekannte Curve gegebenen Geraden, dieser Curve paarweise Tangenten führt, so werden alle Linien, welche die Berührungspuncte jedes Paars dieser Tangenten verbinden, alle einander in einem und demselben Puncte schneiden, und umgekehrt — — — — — — 57

Aufgabe. Wenn zwey Puncte der Lage nach gegen einen bekannten Kreis gegeben sind, auf dem Umkreise einen Punct von der Beschaffenheit zu finden, daß wenn man von demselben nach dem Mittelpuncte und nach den gegebenen Puncten gerade Linien zieht, der Halbmesser mit den beyden andern Geraden Winkel bilde, deren Sinus ein gegebenes Verhältniß zu einander haben — — — — — — — 62

Indirectes aber sehr einfaches Mittel, die geometrische Auflösung der vorhergehenden Aufgabe zu erhalten 62

Aufgabe. Wenn ein Punct der Lage nach in einem bekannten Winkel gegeben ist, die Coordinaten des Mittelpunctes eines Kreises zu finden, welcher einen Schenkel dieses Winkels berührt, und den der andere Schen-

Seite

kel dergestalt schneidet, daß der im Kreise liegende Theil eine gegebene Größe habe — — — — 65

Dritter Abschnitt.

Von den unbestimmten Aufgaben.

Aufgabe. Eine Gerade und ein Punct außerhalb dieser Geraden sind gegen die rechtwinklichten Axen gegeben; man soll so viele Puncte als man will der Geraden finden, welche unterworfen ist durch den gegebenen Punct zu gehen, und mit der gegebenen Linie einen bekannten Winkel einzuschließen — — — — — 78

Aufgabe. Wenn ein Winkel gegeben ist, einen Punct zu finden, von welchem auf die Schenkel dieses Winkels senkrechte Linien gefällt, diese zu einander das Verhältniß von m : n haben — — — — 72

Geometrische Auflösung dieser Aufgabe, und Folgerung, die man daraus zieht, um die Lage eines Punctes zu finden, von welchem auf drey gegebene Linien senkrechte gefällt, diese senkrechte zu einander ein bekanntes Verhältniß haben — — — — — — 72

Aufgabe. Wenn so viele Puncte als man will auf einer Ebne gegeben sind, dazwischen eine Linie dergestalt durchzuziehen, daß wenn man von diesen Puncten auf diese Linie senkrechte fällt, die Summe der senkrechten auf der einen Seite der der senkrechten auf der andern gleich sey — — — — — — — 75

Aufgabe. Wenn so viele Puncte als man will gegeben

Seite

sind, einen andern von der Beschaffenheit zu finden, daß wenn man nach jedem der andern eine gerade Linie zieht, die Summe der Quadrate dieser Linien einem gegebenen Quadrate gleich sey — — — — — 77

Aufgabe. Wenn ein Punct gegen zwey auf einander senkrechte Axen gegeben ist, den Lauf der Mittelpuncte aller Kreise zu bestimmen, welche unterworfen sind durch diesen Punct zu gehen und eine der Axen zu berühren 79

Aufgabe. Wenn eine Gerade der Lage nach gegen einen Kreis gegeben ist, den Lauf der Mittelpunkte aller Kreise zu finden, welche zugleich den Kreis und die gegebene Gerade berühren — — — — — 80

Aufgabe. Durch zwey gegebene Puncte zwey auf einander senkrechte Linien zu führen — — — 81

Aufgabe. Durch zwey gegebene Puncte zwey Gerade zu führen, welche mit einander einen bekannten Winkel einschließen — — — — — — 83

Construction der unbestimmten Gleichung, welche aus der Auflösung dieser Aufgabe erfolgt — — — 83

Aufgabe. Wenn zwey Kreise der Größe und Lage nach auf einer Ebne gegeben sind, den Lauf der Mittelpuncte aller Kreise zu finden, welche die beyden gegebenen Kreise zugleich berühren — — — — — 88

Aufgabe. Die Natur der Curve zu bestimmen, welche alle Puncte enthält, von denen einer gegebenen Parabel zwey Tangenten geführt, diese Tangenten einen gegebenen Winkel einschließen — — — 89

Seite

Aufgabe. Einen Punct zu finden, von welchem, auf die Schenkel eines gegebenen Winkels senkrechte Linien gefällt, das hierdurch gebildete Viereck einem gegebenen Quadrate gleich sey — — — — — 93

Aufgabe. Zwey Kreise sind der Größe und Lage nach gegeben; durch irgend einen Punct des einen habe man eine unbegränzte Tangente geführt, welche den andern in zwey Puncte schneidet, aus welchen jenem Tangenten geführt seyen; man verlangt die Natur der Curve, auf welcher alle Durchschnittspuncte liegen — 96

Aufgabe. Eine Ellipse in ein Dreyeck dergestalt einzuschreiben, daß ein Durchmesser derselben auf der Linie liege, welche durch den Scheitelpunct und der Mitte der Basis geht — — — — — — 99

Bedingung, welche die Aufgabe auf eine einzige Auflösung einschränkt — — — — — 100

Aufgabe. Eine Curve der zweyten Ordnung zu beschreiben, welche durch einen gegebenen Punct geht, und welche die Seiten eines Winkels in zwey gegebenen Puncten berührt — — — — — 103

Aufgabe. Wenn die beyden zugeordneten Durchmesser einer Ellipse nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel gegeben sind, die beyden Halbaxen zu finden 107

Auflösung dieser Aufgabe durch eine geometrische Construction — — — — — — 107

Aufgabe. Die Gleichung einer Curve von der Beschaffenheit zu finden, daß wenn man von einem der Lage

Seite

nach gegen eine Linie gegebenen festen Punct nach allen ihren Puncten gerade Linien zieht, jeder der Theile dieser Linien von einer gegebenen Größe sey — 109

Die Curve, auf welche diese Gleichung führt, wird die Conchoide, Muschellinie, genannt — — — 110

Aufgabe. Die Gleichung der Cissoide zu finden — 110

Aufgabe, woraus die Theorie des Pantographs hergeleitet wird — — — — — — 112

Neues Mittel, eine Ellipse durch eine stetige Bewegung zu beschreiben — — — — — — 117

Aufgabe, Eine Curve durch mehrere gegebene Puncte zu führen — — — — — — — 119

Aus der Auflösung dieser Aufgabe erfolgt eine Interpolationsmethode — — — — — — 125

# Weitere Ausführung der Trigonometrie und höhern Geometrie.

## Erster Abschnitt.

### Von der analytischen Trigonometrie.

§. 1.

Wer die Anfangsgründe der Trigonometrie von Lacroix oder die von Legendre mit Aufmerksamkeit gelesen hat, der kann keine Schwierigkeiten finden, auf dem analytischen Wege die bekannten Formeln zur Auflösung der rechtwinklichten Dreyecke zu erhalten, so wie diese beyden Geometer bey den sphärischen Dreyecken gethan haben. Wir wollen indessen nichts desto weniger die drey Fundamentalgleichungen, welche die zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreyecks anzutreffenden Beziehungen ausdrücken, wieder vornehmen und daraus verschiedene nützliche Resultate herleiten, von denen einige in der Folge ihre Anwendung finden werden. Diese drey Gleichungen sind

$$\left.\begin{array}{l} c^2 + c'^2 - 2cc' \cos\gamma'' = c''^2 \\ c^2 + c''^2 - 2cc'' \cos\gamma' = c'^2 \\ c'^2 + c''^2 - 2c'c'' \cos\gamma = c^2 \end{array}\right\} (A).$$

wenn man die drey Seiten eines geradlinigten Dreyecks durch $c$, $c'$, $c''$, und die diesen Seiten gegenüber stehenden Winkel durch $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$ bezeichnet *).

Nimmt man die erste und zweyte dieser Gleichungen, dann die erste und dritte und endlich die zweyte und dritte zusammen, so werden diese drey Summen respectiv durch $2c$, $2c'$, $2c''$ theilbar seyn, und man wird zu Quotienten die drey einfachen Gleichungen vom ersten Grade haben:

$$\left.\begin{array}{l} c - c' \cos\gamma'' - c'' \cos\gamma' = 0 \\ c' - c \cos\gamma'' - c'' \cos\gamma = 0 \\ c'' - c \cos\gamma' - c' \cos\gamma = 0 \end{array}\right\} (B).$$

Es ist klar, daß man im Allgemeinen, wenn drey Stücke eines Dreyecks gegeben sind, die drey andern bestimmen kann, weil zwischen diesen eine gleiche Anzahl Gleichungen vorhanden ist. Wenn man indessen aus den drey Winkeln eines Dreyecks die drey Seiten bestimmen wollte, so würde das Resultat der Elimination, so wie die geometrischen Betrachtungen lehren, daß die Aufgabe unbestimmt ist.

## §. 2.

Wenn das vorgelegte Dreyeck rechtwinklicht ist, so werden die Gleichungen (B) an und für sich viel ein-

---

*) Man siehe die Anwendungen der Algebra auf die Geometrie von Lacroix §. 79.

facher. Denn wenn $\gamma''$ dem Quadranten oder der Einheit gleich ist, in welchem Falle $\cos\gamma'' = 0$, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} c - c''\cos\gamma' = 0 \\ c' - c''\cos\gamma = 0 \\ c'' - c\cos\gamma' = c'\cos\gamma \end{array}\right\} (C).$$

Da nun unter diesen Umständen $\cos\gamma' = \sin\gamma$, so verwandelt sich die erste dieser Gleichungen in folgende

$$c - c''\sin\gamma = 0,$$

woraus man zieht

$$\sin\gamma = \frac{c}{c''}.$$

Aus eben dem Grunde verwandelt sich die zweyte Gleichung in

$$c' - c''\sin\gamma' = 0,$$

und giebt

$$\sin\gamma' = \frac{c'}{c''}.$$

Hieraus folgt, daß in einem rechtwinklichten Dreyecke der Sinus eines der spitzen Winkel gleich ist, der diesem Winkel entgegenstehenden Seite dividirt durch die Hypothenuse.

Da $\sin\gamma = \frac{c}{c''}$, und $\cos\gamma = \frac{c'}{c''}$, so erhält man wenn der erste Ausdruck durch den zweyten dividirt wird

$$\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{c}{c'} = \text{tang}\,\gamma.$$

Eben so folgt

$$\frac{\sin\gamma'}{\cos\gamma'} = \frac{c'}{c} = \text{tang}\,\gamma'.$$

Es ist demnach die Tangente eines der spitzen Winkel im rechtwinklichten Dreyecke gleich der diesem Winkel entgegenstehenden Cathete dividirt durch die andre Cathete.

§. 3.

Aus der ersten der Gleichungen (C) hat man unmittelbar

$$c'' = \frac{c}{\cos \gamma'},$$

und aus der zweyten Gleichung hat man

$$c'' = \frac{c'}{\cos \gamma}.$$

Diese beyden Ausdrücke für eine und dieselbe Grösse führen auf folgende Proportion

$$\sin \gamma : \sin \gamma' = c : c',$$

wenn man die Cosinus in Sinus verwandelt.

Es verhalten sich daher im rechtwinklichten Dreyecke die Sinus der spitzen Winkel wie die diesen Winkeln gebenüber stehenden Seiten.

§. 4.

Um die Formeln zu finden, welche mit den verschiedenen Fällen der schiefwinklichten Dreyecke übereinstimmen, ziehe man aus der dritten Gleichung (A),

$$\cos \gamma = \frac{c^2 - c'^2 - c''^2}{-2c'c''},$$

und substituirt man diesen Werth in die Gleichung

$$\sin \gamma^2 = 1 - \cos \gamma^2,$$

so kommt, wenn die Operationen auf eine angemessene Art verrichtet werden,

$$\sin\gamma^2 = \frac{2c'^2c''^2 + 2c^2c''^2 + 2c^2c'^2 - c^4 - c'^4 - c''^4}{4c'^2c''^2},$$

woraus man zieht

$$\sin\gamma = \frac{\sqrt{(2c'^2c''^2 + 2c^2c''^2 + 2c^2c'^2 - c^4 - c'^4 - c''^4)}}{2c'c''}.$$

Multiplicirt man den Zähler und Nenner des zweyten Theils durch c, so erhält man

$$\sin\gamma = c \times \frac{\sqrt{(2c'^2c''^2 + 2c^2c''^2 + 2c^2c'^2 - c^4 - c'^4 - c''^4)}}{2cc'c''},$$

und bezeichnet man den die Größe c multiplicirenden Bruch durch M, so wird man haben

$$\sin\gamma = cM;$$

da nun die Größe M eine symetrische Function von den Seiten des Dreyecks ist, so kann man eben so schließen

$$\sin\gamma' = c'M, \quad \sin\gamma'' = c''M.$$

Mithin

$$\sin\gamma' : \sin\gamma'' = c' : c''$$

oder

$$\sin\gamma' c'' = \sin\gamma'' c'.$$

Es verhalten sich daher in jedem Dreyecke die Sinus der Winkel wie die diesen Winkeln gegenüber stehenden Seiten.

## §. 5.

Da $\sin\gamma' c = \sin\gamma c'$, und $\sin\gamma' c'' = \sin\gamma'' c'$, so erhält man, wenn diese Gleichungen Glied für Glied zusammengenommen oder von einander abgezogen werden,

$$(c + c'')\sin\gamma' = c'(\sin\gamma + \sin\gamma'')$$
$$(c - c'')\sin\gamma' = c'(\sin\gamma - \sin\gamma''),$$

woraus man zieht, wenn das erste Resultat durch das andre dividirt wird

$$\frac{c + c''}{c - c''} = \frac{\sin\gamma + \sin\gamma''}{\sin\gamma - \sin\gamma''}.$$

Nun ist nach der Theorie von den Kreisfunctionen

$$\frac{\sin\gamma + \sin\gamma''}{\sin\gamma - \sin\gamma''} = \frac{\text{tang}\left(\frac{\gamma + \gamma''}{2}\right)}{\text{tang}\left(\frac{\gamma - \gamma''}{2}\right)};$$

mithin wird man haben

$$c + c'' : c - c'' = \text{tang}\left(\frac{\gamma + \gamma''}{2}\right) : \text{tang}\left(\frac{\gamma - \gamma''}{2}\right)\ ^{*)}.$$

Diese Proportion bezieht sich auf den Fall, wo zwey Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel eines Dreyecks bekannt sind.

## §. 6.

Wenn man in der Gleichung

$$\cos\gamma = \frac{c''^2 + c'^2 - c^2}{2c'c''}$$

statt $\cos\gamma$ dessen Werth $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\gamma$ setzt, so erhält man, wenn die Zeichen aller Glieder geändert werden, und im ersten Theile nur $\sin^2\frac{1}{2}\gamma$ beybehalten wird, die Gleichung

---

*) Es ist beyläufig zu merken, daß man dieses Resultat weit leichter finden würde, wenn man zu den Eigenschaften der Proportionen seine Zuflucht nehmen wollte. Denn aus $\sin\gamma : \sin\gamma'' = c : c''$ hat man unmittelbar $\sin\gamma + \sin\gamma'' : \sin\gamma - \sin\gamma'' = c + c'' : c - c''$; allein es war unsre Absicht einen mehr analytischen Weg einzuschlagen.

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{2c'c'' - c''^2 - c'^2 + c^2}{4c'c''}.$$

Da der Zähler des zweyten Theils in zwey Factoren zerlegt werden kann, so kann diese Gleichung folgende Form erhalten

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\left(\frac{c + c' - c''}{2}\right)\left(\frac{c - c' + c''}{2}\right)}{c'c''};$$

Da aber $\frac{c + c' - c''}{2} = \frac{c + c' + c''}{2} - c''$, und $\frac{c + c'' - c'}{2} = \frac{c + c'' + c'}{2} - c'$, so erhält man, wenn $c + c' + c''$ durch $s$ bezeichnet, und aus beyden Theilen die Quadratwurzel gezogen wird

$$\sin \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\left\{\frac{\left(\frac{s}{2} - c'\right)\left(\frac{s}{2} - c''\right)}{c'c''}\right\}},$$

eine Formel, die sehr leicht dem logarithmischen Calcul unterworfen werden kann, und welche sehr genau den Winkel eines Dreyecks giebt, wenn seine drey Seiten bekannt sind.

### Von den verschiedenen Veränderungen, welche die Gleichungen der geraden Linie und der Curven vom zweyten Grade in Rücksicht der Axen der Coordinaten erleiden, auf welche diese Linien zurückgeführt werden können.

Da die folgenden Bemerkungen eigentlich nur eine Recapitulation der vorzüglichsten analytischen Resultate

des Verfassers sind, dessen Methode wir anwenden, so verweisen wir in Ansehung der weitern Auseinandersetzungen, die man in dieser Rücksicht wünschen könnte, auf dessen Werk; und wir zeigen ein für alle Mahl an, daß, um nicht das gesagte zu wiederholen, den Paragraphen, die sich auf dessen Lehrbegriff der Anwendung der Algebra auf die Geometrie beziehen, bloß die beyden Buchstaben L. C beygefügt sind.

## §. 7.

Eine durch den Anfangspunct der rechtwinklichten Coordinaten gehende Gerade hat zur Gleichung

$$y = ax,$$

wo a die trigonometrische Tangente des von dieser Geraden und der Axe der Abcissen gebildeten Winkels ist.

Die Gleichung einer Geraden, welche nicht durch den Anfangspunkt geht, ist allgemein durch

Fig. 1. $$y = Ax + B$$

vorgestellt, wo die völlig bekannte Größe B der Ausdruck der mit $x = 0$ correspondirenden Ordinate ist.

Wenn der Lauf einer Geraden durch die besondere Gleichung

$$y = ax - b$$

dargestellt ist, so ist dies der Fall, den Fig. 2. vorstellt.

Ist er durch die Gleichung

$$y = -ax + b$$

ausgedrückt, so ist dies der Fall der Fig. 3.

Wenn er es aber durch die Gleichung

$$y = -ax - b$$

ist, so stellt diesen Fall Fig. 4. dar.

§. 8.

Die Gleichung einer der Axe der Ordinaten parallelen Geraden ist

$$x = a.$$

Eben so ist die Gleichung einer der Axe der Abcissen parallelen Geraden

$$y = b.$$

§. 9.

Eine Gerade, welche unterworfen ist durch einen Punct zu gehen, dessen Coordinaten $\alpha$, $\beta$ sind, und welche mit der Axe der Abcissen einen Winkel macht, dessen Tangente a ist, hat zur Gleichung

$$y - \beta = a(x - \alpha).$$

§. 10.

Zwey gerade Linien sind einander parallel, wenn ihre Gleichungen respectiv sind

$$y = ax + b, \quad y = ax + b'.$$

§. 11.

Zwey durch die Gleichungen

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b'$$

dargestellte Gerade sind auf einander senkrecht, wenn die Gleichung $aa' + 1 = 0$ statt findet, das heißt, wenn $a'$ mit einem entgegengesetzten Zeichen die Cotangente des Winkels ist, dessen Tangente a ist.

§. 12.

Wenn die Gleichung einer Geraden

$$y = ax + b$$

ist, so wird die Länge der von einem Punct, dessen positive Coordinaten $\alpha$, $\beta$ sind, auf diese Linie gefällten senkrechten durch

$$\pm \frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{(1 + a^2)}}$$

ausgedrückt seyn, wo das obere Zeichen in dem Falle genommen wird, wo die Gerade zwischen dem gegebenen Punct und der Axe der Abcissen liegt, und das untere Zeichen in dem Falle statt findet, wo der gegebene Punct zwischen der Geraden und der Axe der Abcissen liegt.

§. 13.

Zwey sich schneidende gerade oder krumme Linien haben in ihren Durchschnittspuncten dieselben Coordinaten.

§. 14.

Wenn die Gleichungen zweyer sich schneidenden Geraden

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b'$$

sind, so ist der Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels

$$\frac{1 + aa'}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + a'^2)}};$$

der Sinus eben dieses Winkels ist

$$\frac{a' - a}{\sqrt{(1 + a^2)}\sqrt{(1 + a'^2)}};$$

und dessen Tangente ist

$$\frac{a' - a}{1 + aa'};$$

wo der Halbmesser der Tafeln der Einheit gleich gesetzt wird.

Wenn aber a negativ ist, so verwandelt sich dieser letztere Ausdruck in

$$\frac{a + a'}{1 - aa'}.$$

Im ersten Falle ist der Winkel, von dem die Rede ist, die Differenz der Winkel, deren Tangenten a, a' sind; und im zweyten Falle ist er deren Summe.

§. 15.

Die allgemeinste Gleichung des Kreises für rechtwinklichte Coordinaten ist

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r^2,$$

wo $\alpha$ und $\beta$ die Coordinaten des Mittelpunctes sind, und r der Halbmesser.

Wenn der Anfangspunct auf den äußersten Punct des Durchmessers verlegt wird, wird diese Gleichung

$$y^2 = 2rx - x^2,$$

und wenn der Anfangspunct im Mittelpuncte liegt, hat man bloß

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

§. 16.

Die allgemeine Gleichung der Curven der zweyten Ordnung ist durch die des zweyten Grades mit zweyen veränderlichen Größen

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F \ldots (1)$$

ausgedrückt. Der Anfangspunct der rechtwinklichten Coordinaten mag auf irgend eine Art in der Ebne der Curve liegen. Um die Art der Curve kennen zu lernen, zu welcher diese Gleichung gehört, wenn die Coefficien-

ten A, B, C ꝛc. besondre Werthe erhalten, hat man bloß auf die drey ersten Rücksicht zu nehmen (§. 115 und folgende. L. C.). So zum Beyspiel gehört die vorgelegte Gleichung zur Ellipse, zur Parabel oder zur Hyperbel, je nachdem 4AC größer, gleich oder kleiner als $B^2$ ist. Allein durch die Veränderung der Axen ist es möglich diese allgemeine Gleichung sehr zu vereinfachen. In der That kann man sie auf die Form

$$\alpha u^2 + \beta t^2 = \gamma \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

zurückführen, wenn der Anfangspunct der Coordinaten in den Mittelpunct der Curve verlegt wird.

Oder sie wird

$$\alpha u^2 + \beta t^2 - \varepsilon t = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

wenn derselbe Anfangspunct auf einen Punct der Curve verlegt wird.

Die Gleichung (2), welche bloß zur Ellipse oder zur Hyperbel gehört, je nachdem $\alpha$ und $\beta$ einerley Zeichen haben oder nicht, wird

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

und

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

wo a und b die Halbaxen dieser Curven angeben.

Bey eben dieser Annahme verwandelt sich die Gleichung (3), welche die drey Curven der zweyten Ordnung in sich faßt, für die Ellipse in

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

und für die Hyperbel in

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - 2ax).$$

Wir werden die Buchstaben a und b accentuiren, wenn wir mit den Gleichungen in Beziehung auf die conjugirten Durchmesser zu thun haben werden.

Endlich ist die Gleichung der Parabel, welche in der Gleichung (3) mit dem Fall übereinstimmt, wo $\beta = 0$

$$y^2 = px,$$

wo p für den Parameter genommen ist.

## Allgemeine Methode, den Curven Tangenten zu führen.

### Aufgabe.

§. 17.

**Wenn ein Punct gegeben ist, die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch diesen Punct geht, und welche unterworfen ist, eine der Art und der Lage nach in einer Ebne gegebene Curve zu berühren.**

### Auflösung.

Um den allgemeinsten Fall zu behandeln, wollen wir die Gleichung der Curven von der zweyten Ordnung

$$y'^2 = mx' + nx'^2$$

betrachten, welche statt findet, wenn die rechtwinklichten Axen AX, AY Fig. 5. ihren Anfangspunct im Scheitel der Curve haben, und wir wollen die positiven Coordinaten des gegebenen Punctes m Fig. 5. durch $\alpha$, $\beta$ bezeichnen. Die Gleichung der gesuchten Geraden wird folglich seyn

$$y - \beta = A(x - \alpha).$$

Dieses vorausgesetzt wird, wenn man durch den Berührungspunct M, dessen Coordinaten $x'$, $y'$ sind, die Secante SM' führt, diese Secante nur dann mit der Tangente TM zusammen fallen, wenn die Sehne MM' verschwindet, oder, welches einerley ist, in dem Augenblick, wo MQ und M'Q zugleich Null werden.

Bezeichnet man ferner die Coordinaten der Puncte der Curve in Rücksicht auf die neuen Axen MX', MY' durch $x''$ und $y''$, und substituirt man in die Gleichung der Curven der zweyten Ordnung $x'' + x'$ statt $x'$ und $y'' + y'$ statt $y'$, so wird man eine andre Gleichung in Beziehung auf diese Axen erhalten. In der That hat man

$$(y'' + y')^2 = m(x'' + x') + n(x'' + x')^2,$$

und läßt man in der Entwickelung die Gleichung der vorgelegten Curve hinweg, so wird der Rest seyn

$$y''^2 + 2y''y' = nx''^2 + 2nx''x' + mx'',$$

welchem man diese Form geben kann

$$y''(y'' + 2y') = x''(nx'' + 2nx' + m),$$

woraus man zieht

$$\frac{x''}{y''} = \frac{y'' + 2y'}{nx'' + 2nx' + m}.$$

Andrerseits wird, da die Linie SMM' gerade ist, das Verhältniß der Coordinaten des Punctes M' in Rücksicht auf den Anfangspunct M mit dem der Coordiaaten des Punctes M in Rücksicht auf den Anfangspunct S einerley seyn; das heißt

$$\frac{y''}{x''} = \frac{y'}{-PS},$$

woraus folgt

$$PS = -\frac{x''}{y''}\,y'.$$

Setzt man nun in diesen Ausdruck statt $\frac{x''}{y''}$ den dafür oben gefundenen Werth, so erhält man

$$PS = -\frac{y'(y'' + 2y')}{nx'' + 2nx' + m};$$

aber PS verwandelt sich in PT wenn MM' Null wird, oder wenn $x'' = y'' = 0$.

Es ist also

$$\text{Subtangente } PT = -\frac{2y'^2}{2nx' + m}.$$

Weil endlich

$$A = \frac{PM}{PT} = \frac{2nx' + m}{2y'},$$

so wird die Gleichung der Tangente TM

$$y - \beta = \frac{2nx' + m}{2y'}(x - \alpha) \quad (T).$$

Und da im Berührungspunct M die Tangente und die Curve einerley Coordinaten haben, welches sich analytisch dur $y = y'$ und $x = x'$ ausdrücken läßt, so wird die vorhergehende Gleichung diese Form annehmen

$$2y'^2 - 2\beta y' = 2nx'^2 + mx' - 2n\alpha x' - m\alpha;$$

setzt man zum zweyten Theile dieser Gleichung $mx' - mx'$ hinzu, so erhält man nach der Reduction, welche die Gleichung der Curven der zweyten Ordnung darbietet

$$-2\beta y' = -mx' - 2n\alpha x' - m\alpha,$$

woraus man zieht

$$y' = \frac{x'(2\alpha n + m) + m\alpha}{2\beta}.$$

§. 18.

Es sey zum Beyspiel die Parabel, deren Gleichung $y'^2 = px'$ ist. In diesem Falle hat man $m = p$ und $n = 0$; die Gleichung der Tangente dieser Curve wird also

$$y' = \frac{p(x' + \alpha)}{2\beta}.$$

Wenn der Punct, durch welchen die Tangente TM gehen muß, in dem Winkel YAT liegen möchte, so würde die Abcisse $\alpha$ negativ seyn, und man würde haben

$$y' = \frac{p(x' - \alpha)}{2\beta}.$$

§. 19.

Die Rechnungen in Beziehung auf die Gleichung

$$y'^2 = m'x'^2 + n, \text{ Fig. 6.}$$

welche der Ellipse und der Hyperbel gemein ist, wenn man ihre Mittelpuncte zum Anfangspunct der Abcissen nimmt, lassen sich genau auf dieselbe Art ausführen. Denn verwandelt man $x$ in $x' + x''$ und $y'$ in $y' + y''$, so wird die gegenwärtige Gleichung durch angemessene Entwickelungen und Reductionen

$$y''(y'' - 2y') = x''(m'x'' + 2m'x'),$$

woraus folgt, daß

$$\text{Subsecante PS} = \frac{y'(y'' - 2y)}{m(x'' + 2x')},$$

und daß

$$\text{Subtangente PT} = \frac{-2y'^2}{2m'x'} = -\frac{y'^2}{m'x'}.$$

Die

Die Gleichung der Tangente TM, für welche

$$A = -\frac{PM}{PT} = \frac{m'x'}{y'}$$

wird also diese Form annehmen

$$y - \beta = \frac{m'x'}{y'}(x - \alpha);$$

aber im Berührungspunct hat man $y = y'$, $x = x'$; die vorhergehende Gleichung verwandelt sich also in

$$y'^2 - \beta y' = m'x'^2 - m'\alpha x',$$

und setzt man von einerley Seite $n' - n'$ hinzu, so erhält man, nachdem alle Zeichen geändert und reducirt worden

$$y' = \frac{m'\alpha x' + n'}{\beta}.$$

§. 20.

Um diese Formel auf einen besondern Fall anzuwenden, sey $y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2)$; alsdann hat man $m' = -\frac{b^2}{a^2}$, und $n' = b^2$; und die Substitution dieser Werthe in die Gleichung für die Tangente giebt

$$y' = \frac{a^2b^2 - b^2\alpha x'}{a^2\beta}.$$

§. 21.

Beym Kreise hat man $b = a$ oder $m' = -1$, und die Gleichung seiner Tangente wird

$$y' = \frac{a^2 - \alpha x'}{\beta} \text{ oder } \beta y' + \alpha x' = a^2.$$

Man findet auch, daß sich $A = \frac{m'x'}{y'}$ in $A = -\frac{x'}{y'}$ verwandelt.

§. 22.

Wenn der Punct m, durch welchen die Tangente geführt werden soll, auf der Curve selbst gegeben wäre, so würde man in diesem Puncte haben $\alpha = x'$, $\beta = y'$, und die Gleichung T würde werden

$$y - y' = \frac{(\frac{1}{2}m + nx')}{y'}(x - x').$$

Dieses ist die Gleichung der Tangente für alle Curven der zweyten Ordnung, wenn der gegebene Punct mit dem Berührungspuncte zusammenfällt. Dieses Resultat ist, wie man sich leicht überzeugen kann, mit dem des §. 146. der höhern Geometrie von Lacroix einerley; und man kann sich ferner überzeugen, daß unsre Methode, in welcher wir von der Uebertragung der Axen Gebrauch gemacht haben, mit derjenigen viel Aehnlichkeit hat, welche dieser Verfasser im ersten Bande seiner Differentialrechnung entwickelt hat.

§. 23.

Es ist wichtig zu bemerken, daß man noch zu Resultaten von derselben Form gelangen würde, wenn selbst die Axe der Ordinaten, welche immer eine Tangente der vorgelegten Curve ist, mit der Axe der Abcissen keinen rechten Winkel bildete. Der Grund hiervon liegt darin, daß die Eigenschaften der Curven der zweyten Ordnung, sowohl in Rücksicht ihrer Durchmesser als ihrer Axen, dieselben sind; nur darf in diesem Falle der

Coefficient von x in der allgemeinen Gleichung für die Tangente nicht als eine trigonometrische Tangente betrachtet werden; es ist im Gegentheil eine Gerade, welche durch den äußersten Punct einer beständigen als Einheit genommenen Abcisse, der Axe der Ordinaten parallel geführt ist.

---

## Zweyter Abschnitt.

### Von den bestimmten Aufgaben und einigen Lehrsätzen der Geometrie.

Wenn alle Bedingungen einer Aufgabe durch Gleichungen ausgedrückt sind, so finden sich die unbekannten darin nothwendigerweise durch die Beziehungen verbunden, welche sie zu den bekannten Größen haben. Alsdann giebt es so viele Gleichungen als Größen zu entdecken sind, die Aufgabe ist alsdann nur einer begränzten Anzahl Auflösungen fähig, und in dergleichen Fällen wird sie bestimmt genannt. Von dieser Art sind folgende Aufgaben.

#### Aufgabe.

§. 24.

**Die zwischen der vom Scheitel eines Dreyecks nach der Mitte der Basis geführten Geraden, und den drey Seiten desselben anzutreffende Beziehung zu finden.**

Es sey Fig. 7.

$$AB = c,\quad AM = c',\quad BM = c''$$
$$AP = x,\quad PM = y,\quad ME = z.$$

Auflösung.

Die rechtwinklichten Dreyecke APM, BPM biethen respectiv die Gleichungen dar

$$y^2 = c'^2 - x^2,\quad y^2 = c''^2 - (c - x)^2,$$

vermittelst deren man erhält

$$x = \frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2c};$$

$$y^2 = \frac{2c^2c'^2 + 2c^2c''^2 + 2c'^2c''^2 - c^4 - c'^4 - c''^4}{4c^2},$$

und folglich

$$BP = \frac{c^2 + c''^2 - c'^2}{2c}.$$

Wenn $c'' > c'$, so ist AP das kleinere Segment, und man hat

$$PE = AE - AP = \frac{c''^2 - c'^2}{2c};$$

da nun $EM^2 = PM^2 + PE^2$, so hat man, wenn die algebraischen Ausdrücke angebracht werden

$$z^2 = \frac{\left[\begin{array}{r} 2c^2c'^2 + 2c^2c''^2 + 2c'^2c''^2 - c^4 - c'^4 \\ - c''^4 + c'^4 - 2c'^2c''^2 + c''^4 \end{array}\right]}{4c^2};$$

schafft man den Nenner weg und reducirt, so kommt für die gesuchte Beziehung

$$4z^2 = 2c'^2 + 2c''^2 - c^2$$

oder wohl

$$2z^2 + 2a^2 = a'^2 + a''^2,$$

wenn man c in 2a, c' in a, und c'' in a'' verwandelt.

Dieser Satz, welcher der vierzehnte des dritten Buchs der Geometrie von Legendre ist, könnte ohne Zweifel viel kürzer aufgelöst werden, wenn man, wie dieser gründliche Geometer gethan, von den Eigenschaften der schiefwinklichten Dreyecke ausginge; allein wir haben unter diesen Umständen vorgezogen auf die Fundamental-Eigenschaften des rechtwinklichten Dreyecks zurück zu gehen, um die möglichst kleinste Anzahl von Prinzipien zu gebrauchen.

## Aufgabe.

### §. 25.

Wenn Fig. 8. die drey Linien gegeben sind, welche von den Winkeln eines Dreyecks ausgehen und sich in der Mitte der gegenüber stehenden Seiten endigen, den analytischen Ausdruck dieser Seiten zu finden.

Es seyen

$$AB = 2c, \quad AC = 2c', \quad BC = 2c''$$
$$CD = d, \quad BF = d', \quad AE = d''.$$

## Auflösung.

Nach der vorhergehenden Aufgabe wird man die drey Gleichungen haben

$$4c^2 + 4c'^2 = 2d''^2 + 2c''^2$$
$$4c^2 + 4c''^2 = 2d'^2 + 2c'^2$$
$$4c'^2 + 4c''^2 = 2d^2 + 2c^2$$

oder besser

$$2c^2 + 2c'^2 = d''^2 + c''^2$$
$$2c^2 + 2c''^2 = d'^2 + c'^2$$
$$2c'^2 + 2c''^2 = d^2 + c^2;$$

zieht man die zweyte von der ersten, dann die dritte von der ersten, und dann die dritte von der zweyten ab und reducirt sie, so erhält man diese drey andre Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} 3c'^2 - 3c''^2 = d''^2 - d'^2 \\ 3c^2 - 3c''^2 = d''^2 - d^2 \\ 3c^2 - 3c'^2 = d'^2 - d^2 \end{array}\right\} (A).$$

Da jede dieser eine Function der beyden andern ist, so existiren im wesentlichen nur zwey Gleichungen zwischen den unbekannten $c$, $c'$, $c''$; um nun eine dritte zu erhalten, indem man unmittelbar von diesen letztern ausgeht, erwäge man, daß, weil die Geraden AC, CB in den Puncten E, F halbirt sind, die Linie EF nothwendigerweise der Basis AB parallel, und der Hälfte derselben gleich seyn muß: man sieht überdieß, daß der Punct G sich zugleich auf der Mitte von EF und CD befindet. Das Dreyeck FCE ist also mit denselben Eigenschaften behaftet als das Dreyeck ACB; man hat folglich die verlangte Gleichung

$$c'^2 + c''^2 = \frac{c^2 + d^2}{2}.$$

dividirt man nun die erste der Gleichungen (A) durch 3, so erhält man diese

$$c'^2 - c''^2 = \frac{d''^2 - d'^2}{3},$$

welche mit der vorhergehenden Gleichung verbunden

$$c'^2 = \frac{3c^2 + 3d^2 - 2d'^2 + 2d''^2}{12},$$

$$c''^2 = \frac{3c^2 + 3d^2 - 2d''^2 + 2d'^2}{12}$$

giebt; wird der Werth von $c'^2$ in der dritten der Glei-

chungen (A) substituirt, so kann man nach den nöthigen Reductionen daraus herleiten

$$9c^2 = 2d'^2 + 2d''^2 - d^2,$$

und man sieht gleich, daß man auch hat

$$9c'^2 = 2d^2 + 2d''^2 - d'^2$$

$$9c''^2 = 2d^2 + 2d'^2 - d''^2;$$

dieses sind die Gleichungen, aus denen man die Werthe der Seiten des Dreyecks ziehen kann.

## Lehrsatz.

## §. 26.

Wenn man von den Scheiteln der Winkel irgend eines geradlinigten Dreyecks Fig. 9. auf die gegenüber stehenden Seiten senkrechte Linien fällt, so werden diese drey senkrechte sich alle in einem und demselben Puncte schneiden.

Es seyen

$$AP = \alpha, \quad PM = \beta \text{ und } AP' = \alpha',$$

so wird man haben

$$PP' = \alpha' - \alpha.$$

## Beweis.

1) Da die Gleichung der durch den Anfangspunct der rechtwinklichten Coordinaten gehenden Geraden AM, $y = \frac{\beta}{\alpha} x$ ist, so wird die der darauf senkrechten und durch den Punct P′ gehenden Geraden P′M″ seyn (§. 9. und 11.)

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}(x - \alpha') \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

2) Da die Gerade P′M mit der Axe der Abcissen einen Winkel einschließt, dessen trigonometrische Tangente $-\frac{\beta}{\alpha' - \alpha}$ ist, so wird die Linie AM′, welche auf dieser Geraden senkrecht ist seyn

$$y = \frac{\alpha' - \alpha}{\beta} x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Dieses vorausgesetzt, werden die veränderlichen Größen x, y, wenn man ihnen dieselben Werthe als in den Gleichungen (1) und (2) beylegt, die Coordinaten des Durchschnittspunctes m der Geraden AM′, P′M″ ausdrücken; durch das gewöhnliche Verfahren der Elimination wird man also finden, daß $x = \alpha$. Da nun die Abcisse des Punctes m der des Punctes M gleich ist, so folgt, daß die drey senkrechten PM, AM′, P′M″ sich in einem und demselben Punct m schneiden; es würde sich eben so verhalten, wenn diese senkrechten sich außerhalb des Dreyecks schnitten.

## Lehrsatz.

### §. 27.

**Wenn man aus der Mitte der Seiten eines Dreyecks nach den Scheiteln der gegenüber stehenden Winkel gerade Linien führt, so werden diese Geraden sich in einem und demselben Puncte schneiden.**

Es seyen Fig. 10.

$Ap = \alpha, \quad Ap' = \alpha', \quad AP' = x'$

$pm = \beta, \quad p'm' = \beta', \quad P'M' = y'$

und $AP = a$;

man wird alsdann haben

$$pP = a - \alpha, \quad AB = \frac{a}{2}, \quad p'P = a - \alpha'.$$

## Beweis.

Vermöge der angenommenen Bezeichnung ist die Gleichung der Geraden AM'

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1),$$

die der Geraden PM' ist

$$y = -\frac{\beta'}{a - \alpha'} (x - a) \;.\;.\;.\;.\;.\; (2),$$

die der Geraden Pm ist

$$y = -\frac{\beta}{a - \alpha} (x - a) \;.\;.\;.\;.\; (3),$$

und die Geraden Am' ist

$$y = \frac{\beta'}{\alpha'} x \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (4).$$

Da überdieß die Puncte m, m' respectiv die Mitten der Geraden AM', M'P sind, so müssen die Ordinaten pm, p'm' nothwendigerweise gleich seyn; also $\beta = \beta'$, und die Gleichungen (2), (4) werden

$$y = \frac{-\beta}{a - \alpha'} (x - a) \;.\;.\;.\;.\;.\; (2')$$

$$y = \frac{\beta}{\alpha'} x \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (4').$$

Um die Coordinaten des Punctes M' zu erhalten, combinire man die Gleichungen (1) und (2') mit einander, in denen man x in x' und y in y' verwandelt, welches geben wird

$$x' = \frac{a\alpha}{a - \alpha' + \alpha'}, \quad y' = \frac{a\beta}{a - \alpha' + \alpha'}$$

und folglich

$$BP' = AP' - AB = \frac{a(\alpha + \alpha' - a)}{2(a - \alpha' + \alpha)}.$$

Da ferner die Gerade BM′ unterworfen ist durch den Punct B, der Mitte von AP zu gehen, und mit dieser einen Winkel zu machen, dessen Tangente $\frac{P'M'}{BP'}$ ist, so wird ihre Gleichung seyn

$$y = \frac{2\beta}{\alpha + \alpha' - a}(x - \tfrac{1}{2}a) \; . \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

Ich bemerke nun, daß, damit die vorgelegten Geraden nur einen und denselben Durchschnitt haben, sie in diesem Puncte nothwendigerweise dieselben Coordinaten haben müssen; das Mittel, diesen Umstand zu untersuchen, besteht nun darin, die Gleichungen der Geraden Pm, Am′, BM′ zu je zweyen und zweyen zu combiniren. Man bemerkt in der That, daß (3) und (4′) zu gleicher Zeit wie (4′) und (5) geben

$$x = \frac{a\alpha'}{\alpha' - \alpha + a}.$$

Die drei Geraden Pm, Am′, BM′ sind also mit der oben vorgetragenen Eigenschaft behaftet *).

---

*) Wenn die Coordinaten des Durchschnittspunctes m″ der Geraden Am′, Pm bekannt sind, so kann man den Satz, worauf es hier ankommt, noch dadurch beweisen, daß man die Gleichung der Geraden sucht, welche durch die Puncte M′, m″ geht; setzt man dann in dieser Gleichung $y = 0$, so erhält man

Der eben bewiesene Satz ist nur ein besondrer Fall von diesem weit allgemeinern Satze, den ich nirgends angeführt gefunden.

Wenn man zwey Seiten eines Dreyecks in einerley Anzahl gleicher Theile theilt, und von den Theilungspuncten nach den gegenüber stehenden Winkeln gerade Linien zieht, so werden die correspondirenden derselben einander in Puncten schneiden, welche auf der durch die Mitte der Basis und durch den gegenüber stehenden Scheitel gehenden Geraden liegen.

Der Beweis des besondren Falles zeigt hinlänglich den des gegenwärtigen Satzes, so daß wir uns entledigt glauben, uns hierüber in ein genaueres Detail einzulassen. Man sehe bloß Fig. 11.

## Lehrsatz.

### §. 28.

In jedem ebnen Vierecke, ist die Summe der Quadrate der vier Seiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonallinien nebst dem vierfachen Quadrate der die Mitte dieser Diagonalen verbindenden Linie.

Es sey Fig. 12. der Punct A für den Anfangspunct der rechtwinklichten Coordinaten genommen, und es seyen

---

zur correspondirenden Abcisse AB, $x = \frac{a}{2}$; die Gerade M′m″ geht also auch durch die Mitte von AP.

$$AA' = c,\quad AB = c',\quad A'B' = c'',\quad BB' = c'''$$

$$BM = \frac{BA'}{2} = d,\quad B'M' = \frac{B'A}{2} = d',\quad MM' = m.$$

Es seyen ferner

$\left.\begin{matrix}\alpha,\ \beta\\ \alpha',\ \beta'\end{matrix}\right\}$ Die Coordinaten der Puncte $\left\{\begin{matrix}M\\ M'\end{matrix}\right.$

Man wird offenbar vermöge dieser Bezeichnung haben

$BH = 2\beta$, $B'H' = 2\beta'$, $PA' = c - \alpha$, $P'A' = c - \alpha'$
$A'H = 2(c - \alpha)$, $AH' = 2\alpha'$, $AH = c - 2\alpha$,
$A'H' = 2\alpha' - c$ und $HH' = c - 2\alpha + 2\alpha'$.

## Beweis.

Da die Entfernungen der beyden Puncte, deren Coordinaten x, y und x', y' sind, durch

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

ausgedrückt sind, so folgt, daß man haben wird

$$\begin{aligned}
c^2 &= c^2\\
c'^2 &= 4\beta^2 + (c - 2\alpha)^2\\
c''^2 &= 4\beta'^2 + (c - 2\alpha')^2\\
c'''^2 &= 4(\beta - \beta')^2 + (c + 2\alpha' - 2\alpha)^2.
\end{aligned}$$

Entwickelt man die angezeigten Potenzen, so findet man, wenn diese vier Gleichungen zusammen genommen und reducirt werden,

$$c^2 + c'^2 + c''^2 + c'''^2 =$$
$$4c^2 + 8\beta^2 + 8\beta'^2 + 8\alpha^2 - 8\alpha c - 8\alpha\alpha' - 8\beta\beta' + 8\alpha'^2.$$

Da der zweyte Theil auch folgendermaßen geschrieben werden kann

$$4(\alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2) +$$
$$4(c^2 - 2\alpha c + \alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha\alpha' + \alpha'^2 + \beta^2 - 2\beta\beta' + \beta'^2),$$

so kann man dieser letztern Gleichung folgende Form geben

$$c^2 + c'^2 + c''^2 + c'''^2 =$$
$$4(\alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2) + 4(c-\alpha)^2 + 4(\alpha-\alpha')^2 + 4(\beta-\beta')^2;$$

Aber andrerseits ist

$$4d^2 = 4\beta^2 + 4(c-\alpha)^2$$
$$4d'^2 = 4\alpha'^2 + 4\beta'^2$$
$$4m^2 = 4(\beta-\beta')^2 + 4(\alpha-\alpha')^2;$$

Es ist also

$$c^2 + c'^2 + c''^2 + c'''^2 = 4d^2 + 4d'^2 + 4m^2 =$$
$$D^2 + D'^2 + 4m^2,$$

wenn man die ganzen Diagonallinien durch D und D' bezeichnet.

Dieser elegante Lehrsatz, welchen man Eulern zuschreibt, ist im fünften Bande der neuen Petersburger Commentaren und in der Geometrie von Tedenat auf verschiedene Art bewiesen.

## Lehrsatz.

### §. 29.

**Wenn zwey Vierecke, Fig. 13. gleiche Diagonallinien haben, welche überdies einerley Winkel einschließen, so sind diese Vierecke einander gleich, auf was für eine Art übrigens diese Linien einander schneiden mögen.**

Es seyen

$$MM' = \delta,\quad AM = z,\quad PM = y$$
$$NN' = \delta',\quad AM' = z',\quad P'M' = y'$$

und der Sinus des Winkels MAN sey durch s vorgestellt.

### Beweis.

Die Ordinaten PM, P'M' sind respectiv die Seiten des rechten Winkels der rechtwinklichten Dreyecke APM, AP'M', so wie AM und AM' deren Hypothenusen sind; man hat also nach §. 2. des ersten Abschnitts

$$y = \mathfrak{s}z, \quad y' = \mathfrak{s}z'.$$

Da das Viereck MM' aus den beyden Dreyecken MNN', M'NN' zusammengesetzt ist, so wird sein Flächeninhalt durch

$$\frac{y\mathfrak{z}' + y'\mathfrak{z}'}{2}$$

ausgedrückt seyn; substituirt man für y und y' ihre oben erhaltene Werthe, so kommt

$$\mathfrak{z}'\left(\frac{z + z'}{2}\right)\mathfrak{s};$$

aber $z + z' = \mathfrak{z}$; es ist daher

$$\text{Fläche } M'NMN' = \frac{\mathfrak{z}\mathfrak{z}'}{2}\,\mathfrak{s};$$

mithin ist der Flächeninhalt des Vierecks beständig, in welchem Puncte sich auch die Diagonalen M'M, N'N schneiden mögen, wofern nur der Winkel MAN derselbe bleibt.

### Aufgabe.

§. 30.

**Wenn ein spitzer Winkel eines rechtwinklichten Dreyecks gegeben ist, die Lage der Hypothenuse dergestalt zu bestimmen, daß dieses Dreyeck einem gegebenen Quadrate gleich sey.**

Es seyen Fig. 14. $q^2$ das gegebene Quadrat, a die

Tangente des bekannten Winkels APD, und $\alpha$ die unbekannte AP.

## Auflösung.

Da die Gerade DP unterworfen seyn muß durch einen auf der Axe der Abcissen AX genommenen Punct P zu gehen, so ist ihre Gleichung

$$y = -a(x - \alpha).$$

Setzt man nun $x = o$, so hat man für die correspondirende Ordinate AD, $y = a\alpha$.

Da der Flächeninhalt des Dreyecks ADP, $\frac{AD \times AP}{2} = \frac{a\alpha^2}{2}$ ist, so folgt, daß $q^2 = \frac{a\alpha^2}{2}$, und folglich

$$\alpha = \pm \sqrt{\left(\frac{2q^2}{a}\right)}.$$

Wenn der positive Werth von $\alpha$ durch AP, und sein negativer Werth durch Ap ausgedrückt wäre, so würden die beyden Dreyecke APD, ApD den beyden Auflösungen der vorgelegten Aufgabe ein Genüge thun.

## Aufgabe.

### §. 31.

Durch einen in Rücksicht auf einen bekannten Winkel M′AN der Lage nach gegebenen Punct M, Fig. 15. eine Gerade MN dergestalt zu führen, daß der Raum des Dreyecks AM′N einem gegebenen Quadrate gleich sey.

Es seyen $\alpha$, $\beta$ die rechtwinklichten Coordinaten des Punctes M; A der Anfangspunct; $q^2$ das gegebene

Quadrat; a die Tangente des Winkels M'AN; die unbekannten P'M' = y und AN = $\alpha'$. Man wird dann haben

$$PN = \alpha' - \alpha.$$

Auflösung.

Die Gleichung der Geraden M'A ist

$$y = ax,$$

die der Geraden MN, die man sich als unterworfen durch den Punct N zu gehen denken muß, ist

$$y = \frac{-\beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha').$$

Wenn die Coordinaten dieser Geraden gemeinschaftlich sind, so werden sie die des Punctes M' ihres gemeinschaftlichen Durchschnitts vorstellen; man wird also haben

$$y = \frac{a\alpha'\beta}{a(\alpha' - \alpha) + \beta}.$$

Aber der Flächeninhalt des Dreyecks AM'N ist

$$\frac{\alpha' y}{2} = q^2;$$

und wenn man in diesem Ausdruck den Werth von y substituirt, so wird man haben

$$\frac{a\alpha'^2\beta}{a(\alpha' - \alpha) + \beta} = 2q^2,$$

oder

$$a\alpha'^2\beta = 2q^2a\alpha' - 2q^2a\alpha + 2q^2\beta \ \ldots\ldots \ (1).$$

Diese Gleichung in Rücksicht auf $\alpha'$ aufgelöst, giebt einen zweyten Punct N der gesuchten Linie, und die Aufgabe ist alsdann aufgelöst; da aber die Formel, die man in dieser Absicht construiren müßte, ein wenig verwickelt ist, so

so wird es nützlich seyn, sie vermittelst folgender Betrachtung zu vereinfachen.

Weil man für alle Puncte M' der Geraden AM'

$$\frac{y}{x} = a$$

hat, so sey

$$a = \frac{\beta}{n};$$

in diesem Falle wird die Größe n den zwischen der senkrechten PM und der der AM' parallel geführten Linie A'M liegenden Theil A'P ausdrücken; und bezeichnet man den Zwischenraum AA' durch d, so hat man AP, oder $\alpha = n - d$. Werden nun diese Werthe von a und $\alpha$ in der Gleichung (1) substituirt, so findet man, nachdem die sich darbiethenden Reductionen verrichtet worden,

$$\alpha'^2\beta = 2q^2\alpha' + 2q^2d,$$

woraus man zieht

$$\alpha' = \frac{q^2}{\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{2q^2d}{\beta} + \frac{q^4}{\beta^2}\right)},$$

oder, um mehrerer Leichtigkeit der Construction willen,

$$\alpha' = \frac{q^2}{\beta} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{q^2}{\beta} + 2d\right)\frac{q^2}{\beta}\right]}.$$

Auf einer unbegränzten Linie PQ Fig. 15.* errichte man die senkrechte AC $= \beta$; nehme CO $=$ CM $= q$, und nachdem man AM gezogen, führe man ihr durch den Punct O die parallele ON, welche CN für den Werth von $\frac{q^2}{\beta}$ bestimmen wird; dieses ist aus der Theorie der Proportionallinien klar. Es sey nun $\frac{q^2}{\beta} = m$, so wird sich der Werth von $\alpha'$ in

$$m + \sqrt{[(m + 2d) m]}$$

verwandeln. Da nun der mit dem Wurzeichen behaftete Theil eine mittlere Proportionallinie ausdrückt, so nehme man CQ = 2d, und auf NQ, als auf einen Durchmesser, beschreibe man einen halben Umkreis NVQ; die Sehne NV wird vermöge dieser Construction der Größe $\sqrt{[(m + 2d) m]}$ gleich seyn. Nimmt man also PN = NV, so wird man haben

$$PC = \alpha'.$$

Um den zweyten Werth von $\alpha'$ zu erklären, muß man in Erwägung ziehen, daß er dem Fall ein Genüge leistet, wo man die Gerade MN im Winkel A'Am führen wollte; und es könnte sich überdieß zutragen, daß d von der Seite der positiven x, oder daß $\beta$ negativ sey; alle diese verschiedenen Umstände der Aufgabe bringen in den Constructionen Veränderungen hervor, von denen man sich leicht dea Grund ängeben kann.

In der Folge werden wir uns nicht mehr so sehr über die Art in einer algebraischen Formel alle Folgerungen und alle daraus herzuleitenden Constructionen zu entwickeln auslassen, um dem Fleiße der Leser etwas vorzubehalten. Wir wollen nur noch für den gegenwärtigen Fall anmerken, daß die vorhergehende Auflösung natürlich der Aufgabe zukommt, wo man sich vorlegt, durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu führen, welche irgend eine geradlinigte Figur in zwey Theile theilt, die ein bekanntes Verhältniß zu einander haben.

## Aufgabe.

§. 32.

Wenn Fig. 16. ein Zirkel von einem bekannten Halbmesser und eine Linie CB der Lage nach in Rücksicht auf zwey feste Axen gegeben sind, dem Kreis eine Tangente TM zu führen, welche zugleich der CB parallel sey.

Es seyen r der Halbmesser des Kreises, a die trigonometrische Tangente des Winkels BCA, und $\alpha$ die bekannte Entfernung AT.

## Auflösung.

Da die Linie MT der BC parallel werden muß, so wird der Winkel MTA nothwendigerweise dem Winkel BCA gleich seyn; vermittelst des Lehrsatzes der Tangenten (§. 21.), hat man also

$$a = \frac{r}{\sqrt{(\alpha^2 - r^2)}} \ldots\ldots\ldots (1),$$

wie man sich leicht überzeugen kann. Ferner ist

$$a = \frac{PM}{PT} = \frac{x}{y} \ldots\ldots\ldots\ldots (2):$$

Die Gleichung der Tangente TM, welche ist

$$\beta y + \alpha x = r^2,$$

wird, wenn $\beta = 0$

$$\alpha x = r^2 \text{ oder } x = \frac{r^2}{\alpha}:$$

Die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 = r^2$$

giebt

$$y = \sqrt{(r^2 - x^2)};$$

oder, wenn man x vermöge seines vorhergehenden Werths eliminirt,

$$y = \frac{r}{\alpha} \sqrt{(\alpha^2 - r^2)},$$

substituirt man die Werthe von x und y in die Gleichung (2), so erhält man die Gleichung (1); und diese letztere in Rücksicht auf $\alpha$ aufgelöst, giebt für die gesuchte Auflösung

$$\alpha = \frac{r \sqrt{(a^2 + 1)}}{a},$$

oder, wenn man, um die Glieder homogen zu machen, die Einheit durch m bezeichnet (§. 76. L. C.)

$$\alpha = \frac{r \sqrt{(a^2 + m^2)}}{a}.$$

Um diese Größe zu construiren, fälle man vom Puncte A auf die Gerade BC die senkrechte AB, und man führe durch den äußersten Punkt M des Halbmessers AM die Tangente MT, welche mit der vorgetragenen Eigenschaft behaftet seyn wird. In der That wird, da CB für m genommen, und der Winkel ABC nach der Construction ein rechter ist, die Linie AB die Tangente des Winkels BCA vorstellen. Ferner hat man wegen der Parallelen CB, MT diese Proportion

$$AB : AM = CA : AT,$$

oder in algebraischen Ausdrücken

$$a : r = \sqrt{a^2 + m^2} : \alpha = \frac{r \sqrt{(a^2 + m^2)}}{a}.$$

Uebrigens ist diese Auflösung nicht der vorgelegten Aufgabe besonders eigen; denn wenn die gegebene Curve eine Parabel wäre, und man wollte (wenn alles übrige

gleich ist) die Werthe der Coordinaten des Berührungspunctes finden, so würde man eben so die Gleichung dieser Curve mit der Gleichung

$$\frac{p}{2y'} = a$$

vergleichen, welche (§. 18.) die trigonometrische Tangente des von der Tangente der Curve und der Axe der Abcissen gebildeten Winkels ist, und man würde haben

$$x' = \frac{p}{4a^2}, \quad y' = \frac{p}{2a}.$$

## Aufgabe.

### §. 33.

**Zweyen der Größe und Lage nach gegebenen Kreisen eine gemeinschaftliche Tangente zu führen.**

Es seyen Fig. 17. AA' = $\delta$, r der Halbmesser des Kreises AM, r' der Halbmesser des Kreises A'M', $\alpha$ die unbekannte Entfernung AT, und a die trigonometrische Tangente des Winkels MTA.

## Auflösung.

Es folgt aus dem vorhergehenden Lehrsatze und daraus, daß M'T die beyden gegebenen Kreise berühren muß, daß für den Kreis AM

$$a = \frac{r}{\sqrt{(\alpha^2 - r^2)}},$$

und für den Kreis A'M'

$$a = \frac{r'}{\sqrt{[(\alpha + \delta)^2 - r'^2]}}.$$

Setzt man diese beyden Werthe einander gleich und schafft das Wurzelzeichen hinweg, so kommt

$$\frac{r^2}{\alpha^2 - r^2} = \frac{r'^2}{(\alpha + \delta)^2 - r'^2}.$$

Schafft man die Nenner hinweg und entwickelt, so findet man nach der Reduction

$$\alpha^2 r^2 + 2\alpha\delta r^2 + \delta^2 r^2 = \alpha^2 r'^2.$$

Zieht man aus beyden Theilen die Quadratwurzel, so hat man

$$\alpha r + \delta r = \alpha r',$$

und endlich

$$\alpha = \pm \frac{\delta r}{r' - r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

welches wegen des doppelten Zeichens $\pm$ anzeigt, daß die Aufgabe zweyer Auflösungen fähig ist; es ist aber klar, daß es überdieß noch zwey andre giebt, welche in Beziehung auf den Fall sind, wo die Tangente M''M''' die Linie AA' zwischen beyden Kreisen schneidet. Um diese neuen Auflösungen zu erhalten, darf man bloß in Erwägung ziehen, daß der Halbmesser r des Kreises AM, welcher in dem Ausdruck der Tangente M''T' vorkommt, in Rücksicht des Halbmessers r' des Kreises A'M' negativ genommen werden muß. Die Gleichung (1) wird also

$$\alpha = \pm \frac{\delta r}{r' + r}.$$

Die Auflösung dieser Aufgabe hängt von der vorhergehenden ab; indessen sind beyde nur besondre Fälle einer weit ausgedehntern, in der höhern Geometrie von Lacroix §. 91. abgehandelten Aufgabe. Da es ange-

messen ist, sich vorzugsweise an den allgemeinen Auflösungen zu halten, so wollen wir zur Analysis der folgenden Aufgabe übergehen.

## Aufgabe.

### §. 34.

Wenn zwey Kreise der Größe und Lage nach gegeben sind, durch dieselbe eine gerade Linie dergestalt durchzuführen, daß die in denselben liegenden Theile dieser Geraden einander, und einer gegebenen Linie m gleich seyen.

Es seyen Fig. 18.

$\left.\begin{matrix} r \\ r' \end{matrix}\right\}$ die Halbmesser der gegebenen Kreise $\left\{\begin{matrix} C \\ C' \end{matrix}\right.$

Wir wollen überdieß $CC' = \delta$, $C'A = \alpha$ setzen, und durch a die Tangente des Winkels CAB bezeichnen.

## Auflösung.

Um den zu Ende des vorhergehenden §. vorgesetzten Zweck zu erreichen, wollen wir den im §. 91. des citirten Werks von Lacroix erhaltenen Ausdruck für die trigonometrische Tangente des Winkels A wieder vornehmen, und wir wollen darin alle die Veränderungen anbringen, welche unsre angenommene Bezeichnung erfordert. Also hat man beym Kreise C für den Werth der Tangente CAB,

$$a = \frac{\sqrt{(4r^2 - m^2)}}{\sqrt{[4(\alpha + \delta)^2 - 4r^2 + m^2]}},$$

und beym Kreise C′ hat eben diese Tangente zum Ausdruck

$$a = \frac{\sqrt{(4r'^2 - m^2)}}{\sqrt{(4\alpha^2 - 4r'^2 + m^2)}}.$$

Setzt man diese Werthe, von ihren Wurzelzeichen befreyet, einander gleich, dividirt alles durch 4, und setzt zur Abkürzung $r^2 - \frac{m^2}{4} = h^2$, $r'^2 - \frac{m^2}{4} = h'^2$, so wird man haben

$$\frac{h^2}{(\alpha + \delta)^2 - h^2} = \frac{h'^2}{\alpha^2 - h'^2}.$$

Schafft man die Nenner weg, entwickelt und reducirt, so findet man

$$\alpha^2 h^2 = \alpha^2 h'^2 + 2\alpha\delta h'^2 + \delta^2 h'^2.$$

Zieht man von beiden Seiten die Quadratwurzel, so erhält man

$$\alpha h = \pm (\alpha h' + \delta h'),$$

woraus man endlich zieht

$$\alpha = \pm \frac{\delta h'}{h \mp h'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Diese Formel, bloß in Rücksicht der beyden obern Zeichen betrachtet, kann auf folgende Art construirt werden.

Auf die Halbmesser CB, C′B′ der gegebenen Kreise beschreibe man halbe Umkreise, und durch die Puncte B, B′ führe man die Sehnen BD, B′D′ unter einander und der Hälfte der gegebenen Geraden m gleich; ziehe die Sehnen CD, C′D′, welche die respectiven Größen von h und von h′ seyn werden.

Man führe dann CP der C′D′ parallel; nehme $Cn = h - h'$, und $Cq = h$; verbinde die Puncte n, C′, und durch die Puncte q, D′ führe man in A die Gerade qD′A; so wird der Punct A derjenige seyn,

durch welchen die vorgelegte Secante geführt werden muß.

Endlich beschreibe man auf C'A als Durchmesser einen halben Umkreis; trage C'D' von C' in d, und ziehe die unbegränzte Gerade Ad, welche diejenige seyn wird, von der die in den Kreisen liegenden Theile derselben einander und der gegebenen Linie m gleich seyn werden.

Wenn m = o, so erlangen die Größen h und h' respectiv die Werthe r und r', und alsdann wird die Gleichung (1)

$$\alpha = \pm \frac{2r'}{r \mp r'},$$

welche offenbar auf die des vorhergehenden §. zurück kommt, wenn man r in r' und umgekehrt verwandelt.

§. 35.

Der Ausdruck

$$a = \frac{\sqrt{(4r'^2 - m^2)}}{\sqrt{(4\alpha^2 - 4r'^2 + m^2)}},$$

auf welchem die Auflösung dieser obigen gegründet ist, nimmt eine neue Form an, wenn $\alpha = r'$; in diesem Falle, welcher mit demjenigen übereinstimmt, wo es darauf ankommt, durch den äußersten Punct des Durchmessers eines bekannten Kreises eine Sehne von einer gegebenen Größe m zu ziehen, hat man

$$a = \frac{\sqrt{(4r'^2 - m^2)}}{m},$$

woraus folgt

$$m = \frac{2r}{\sqrt{(a^2 + 1)}} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Hierdurch ist nun der folgende Satz leicht analytisch zu beweisen.

### Lehrsatz.

### §. 36.

Wenn man durch den Berührungspunct zweyer gegebenen Kreise zwey Gerade AB, AB' Fig. 19. nach Belieben führt, welche diese Kreise schneiden, so werden die Sehnen AB, AB' durch den Umkreis des kleinern Kreises in proportionale Theile geschnitten werden, und folglich werden die Linien BB', DD' parallel seyn.

Es seyen

$\left.\begin{matrix} r \\ r' \end{matrix}\right\}$ die Halbmesser $\left\{\begin{matrix} AC \\ AC' \end{matrix}\right.$ $\qquad$ $\left.\begin{matrix} a \\ a' \end{matrix}\right\}$ die Tangenten $\left\{\begin{matrix} BAX \\ B'AX, \end{matrix}\right.$

und wir wollen durch

M, M', m, m' $\}$ die Sehnen $\{$ AB, AB', AD, AD'

bezeichnen.

### Beweis.

Man wird vermöge der Gleichung (2) des vorhergehenden §. haben

$$M = \frac{2r}{\sqrt{(a^2+1)}}, \quad M' = \frac{2r}{\sqrt{(a'^2+1)}}$$

$$m = \frac{2r'}{\sqrt{(a^2+1)}}, \quad m' = \frac{2r'}{\sqrt{(a'^2+1)}},$$

woraus man zuvörderst schließt

$$M : m = r : r' = M' : m'.$$

Man könnte auch direct beweisen, daß die Geraden BB', DD' parallel sind; denn bezeichnet man die re-

spectiven Coordinaten der Puncte B, D, B′, D′ durch X, Y; x, y; X′, Y′; x′, y′; so würden die Tangenten der von den Geraden BB′, DD′ und der Axe der Abcissen AX gebildeten Winkel seyn

$$\frac{Y - Y'}{X' - X} \text{ und } \frac{y - y'}{x' - x'},$$

welche Werthe einander gleich sind, wie man sich durch eine einfache Substitution der Werthe der Coordinaten überzeugen kann.

Dieser Lehrsatz, welcher sehr merkwürdig ist, führt auf eine sehr elegante Auflösung der folgenden Aufgabe.

**Wenn zwey Puncte der Lage nach in Rücksicht auf einen bekannten Kreis gegeben sind, einen neuen Kreis zu beschreiben, welcher den ersten berühre, und welcher durch die beyden gegebenen Puncte gehe.**

Man kann hierüber Ozanams Récréations Mathématiques, neue Ausgabe, zu Rathe ziehen.

## Aufgabe.

### §. 37.

**Wenn ein Kreis der Größe und Lage nach in einem bekannten Winkel gegeben ist, den Mittelpunct eines Kreises zu finden, welcher zugleich die Schenkel des Winkels und den gegebenen Kreis berühre.**

Es seyen Fig. 20. $\alpha$ und $\beta$ die Coordinaten des auf der Geraden AM gelegenen Punctes M; $\alpha'$ und $\beta'$ die Coordinaten des Mittelpunctes M′ des gesuchten Kreises; r der Halbmesser des bekannten Kreises, b = PN

die Ordinate des Mittelpunctes dieses Kreises, und AN = B.

## Auflösung.

Da der Kreis P'C die Seiten AX, AC berühren muß, so wird sein Mittelpunct auf der Geraden AM liegen, welche den Winkel CAX in zwey gleiche Theile theilt, und die Mittelpuncte M', N, so wie der Berührungspunct D werden in einer geraden Linie liegen. Zwischen den Coordinaten der Puncte M, M', welche auf einerley Geraden AM liegen, ist diese Beziehung anzutreffen.

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ oder } \alpha\beta' = \alpha'\beta.$$

Ferner hat man zwischen den Entfernungen M'N der Mittelpuncte und den Coordinaten ihrer Endpuncte diese andre Beziehung

$$(r + \beta')^2 = (b - \beta')^2 + (\alpha - \alpha')^2;$$

entwickelt man diese, reducirt und substituirt man für $\beta'$ den aus der ersten Gleichung gezogenen Werth $\frac{\alpha'\beta}{\alpha}$, so kommt, weil $B^2 = \alpha^2 + b^2$,

$$r^2 + \frac{2\alpha'\beta r}{\alpha} = B^2 - \frac{2b\beta\alpha'}{\alpha} + \alpha'^2 - \frac{2\alpha^2\alpha'}{\alpha},$$

woraus man zieht, wenn sie in Rücksicht auf $\alpha'$ aufgelöst wird

$$\alpha' = \alpha + \beta\frac{(b+r)}{\alpha} \pm \sqrt{\left\{\left[\alpha + \beta\left(\frac{b+r}{\alpha}\right)\right]^2 - (B^2 - r^2)\right\}}.$$

Diese Größe ist einer sehr einfachen und eleganten Construction fähig. In der That nehme man AQ = b + r, und die Ordinate QR wird zum analytischen Ausdruck

haben $\beta \frac{b+r}{\alpha}$; man trage RQ von P in R', und AR' wird die rationale Größe vorstellen; man führe dann dem gegebenen Kreise die Tangente AT, welche der Größe $\sqrt{(B^2 - r^2)}$ gleich seyn wird, weil $AT^2 = AN^2 - NT^2$, verlängre NT unbegränzt, und mache AS = AR'; die Wurzelgröße wird durch TS vorgestellt seyn. Endlich nehme man SV = AS und SV' = ST; so werden die Theile TV, VV' die beyden Werthe von $\alpha'$ seyn. Der erste Theil stimmt mit dem Fall überein, wo der gegebene Kreis zwischen dem Anfangspunct und dem zu beschreibenden Kreise liegt, und der zweyte mit dem Falle, wo der zu beschreibende Kreis zwischen dem gegebenen Kreise und dem Anfangspunct liegt.

### Aufgabe.

### §. 38.

Ein Trapezium Fig. 21. durch eine beyden Grundlinien parallele Linie in zwey gleiche Theile zu theilen.

Es seyen

$$AB = b, \quad BD = h, \quad AC = h',$$
$$AP = x, \quad PM = y.$$

### Auflösung.

Da die Gleichung der Geraden CD

$$Y = \frac{h - h'}{b}(X) + h',$$

ist, so hat man zwischen den Coordinaten des Punctes M die Beziehung

$$y = \frac{h - h'}{b} x + h',$$

und weil der Flächeninhalt des Trapeziums

$$ABCD = \frac{h + h'}{2} b,$$

so wie der des Trapeziums

$$APMC = \frac{(h - h') x + 2bh'}{2b} x$$

so kann man daraus herleiten

$$[(h - h') x + 2bh'] x = \frac{(h + h') b^2}{2}$$

oder

$$2(h - h') x^2 + 4bh'x = (h + h') b^2 \quad \ldots\ldots (A),$$

woraus man zieht

$$x = -\frac{bh'}{h - h'} + \sqrt{\left[\left(\frac{h + h'}{2} + \frac{h'^2}{h - h'}\right)\frac{b^2}{h - h'}\right]} \ldots (B).$$

Man nimmt gleich wahr, daß sich diese Formel sehr vereinfachen lassen muß, wenn eine der Grundlinien, zum Beyspiel $h'$ Null ist. In der That hat man für den Fall des Dreyecks

$$x = \pm \sqrt{\frac{b^2}{2}};$$

wenn aber $h = h'$, so kann man aus der Gleichung (B) in dem Zustande, worin sie sich gegenwärtig befindet, nichts herleiten; alsdann würde man die Reduction der Gleichung (A) vollziehen; oder besser, man würde folgendermaßen verfahren:

Man verwandle in der Formel (B) $h$ in $h' + q$, so wird sie

$$x = \frac{-bh' \pm b\sqrt{[\frac{1}{2}(2h'q + q^2 + 2h'^2)]}}{q};$$

man etwickle die Wurzelgröße in Rücksicht der zunehmenden Potenzen von q, welche sich nach der Binomialformel, oder besser, nach der Methode der unbestimmten Coefficienten bewerkstelligen läßt, und man wird diese Reihe haben

$$x = \frac{b}{2} + \frac{bq}{8h'} + \ldots\ldots$$

Wenn $h' = h$ hat man $q = o$, und alsdann verschwinden alle Glieder dieser Reihe außer das erste $\frac{b}{2}$; woraus folgt $x = \frac{b}{2}$, wie sich auch erwarten ließ. Um eine ausgebreitetere Kenntniß von diesem analytischen Verfahren zu erlangen, sehe man den schon citirten Lehrbegriff der Differentialrechnung.

## Lehrsatz.

### §. 39.

**Ein schiefwinklichtes Dreyeck durch zwey sich unter rechten Winkeln schneidende Linien in vier gleiche Theile zu theilen.**

Es seyen Fig. 22. $AB = a$, $\alpha$ und $\beta$ die Coordinaten des Scheitels C des gegebenen Dreyecks

$$BN = z, \quad AN' = z',$$

so wird man haben

$$AN = a - z;$$

es sey ferner

$$BD = a - \alpha = c,$$

so wird man haben

$$\text{Fläche } ACB = \frac{a\beta}{2}.$$

## Auflösung.

Die Gerade AC hat zur Gleichung

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

die Gerade CB

$$y = \frac{-\beta}{c} (x - a) \; . \; . \; . \; . \; . \; (2),$$

die Gerade NH

$$y = A (x - a + z) \; . \; . \; . \; . \; . \; (3),$$

die Gerade N'H'

$$y = \frac{-1}{A} (x - z') \; . \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Combinirt man nun die Gleichungen (2), (3), so wird für die Ordinate des Punctes H erfolgen

$$y = Hh = \frac{A\beta z}{Ac + \beta},$$

und da der Flächeninhalt des Dreyecks

$$NHB = \frac{ACB}{2} = \frac{a\beta}{4},$$

so wird man haben

$$\frac{A\beta z^2}{Ac + \beta} = \frac{a\beta}{4},$$

woraus man zieht

$$A = \frac{a\beta}{2z^2 - ac} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (T)$$

Verbindet man auf eben die Art die Gleichungen (1) und (4) mit einander, so wird man für die Ordinate des Punctes H' erhalten

$$y = H'h' = \frac{\beta z'}{A\beta + \alpha},$$

und

und da der Flächeninnhalt des Dreyecks

$$AN'H' = \frac{ACB}{2} = \frac{a\beta}{4},$$

so hat man

$$\frac{\beta z'^2}{A\beta + \alpha} = \frac{a\beta}{2},$$

woraus man zieht

$$A = \frac{2z'^2 - a\alpha}{a\beta} \quad \ldots\ldots \quad (T').$$

Um nun eine erste Beziehung zwischen z und z' zu erhalten, setze man die beyden Werthe von A einander gleich, und man wird haben, nachdem die Nenner hinweg geschaft seyn werden

$$(2z'^2 - a\alpha)(2z^2 - ac) = a^2\beta^2 \quad \ldots\ldots \quad (m).$$

Andrerseits werden die Gleichungen der Geraden NH, N'H', wenn man respectiv für A dessen Werthe (T), (T') substituirt

$$y = \frac{a\beta}{2z^2 - ac}(x - a + z)$$

$$y = \frac{-a\beta}{2z'^2 - a\alpha}(x - z')$$

welches für die Ordinate des Durchschnittspunctes K eben dieser Geraden giebt

$$y = Kk = \frac{a\beta z' - a^2\beta + a\beta z}{2z^2 - ac + 2z'^2 - a\alpha};$$

da aber

$$NN' = AN' - AN = z' - a + z,$$

und weil der Flächeninnhalt des Dreyecks NKN' = $NN' \times \frac{Kk}{2} = \frac{ACB}{4}$, so wird man diese andre Beziehung zwischen den Unbekannten z, z' haben

$$\frac{a\beta\,(z' - a + z)^2}{2z^2 - ac + 2z'^2 - a\alpha} = \frac{a\beta}{4},$$

oder wenn man für C dessen Werth $a - \alpha$ setzt und vereinfacht

$$4(z' - a + z)^2 = 2z^2 - a^2 + 2z'^2,$$

oder endlich

$$2z'^2 + 2z^2 + 5a^2 - 8az' + 8zz' - 8az = 0 \ldots (N).$$

Wollte man eine geometrische Auflösung der vorgelegten Aufgabe haben, so dürfte man nur besonders die Curven construiren, deren Fortgang durch die beyden Gleichungen (M), (N) bestimmt ist; die verschiedenen Durchschnittspuncte dieser Curven würden die Werthe von z und z′ geben, und man würde dann die Lage des Punctes K finden, in welchen sich die Geraden NH, N′H′ senkrecht durchschneiden müssen. Man könnte noch zu eben dem Zwecke gelangen, wenn man nach der zu Ende der höhern Geometrie von Lacroix auseinandergesetzten Methode, die aus der Elimination einer unbekannten Größe aus den Gleichungen (M), (N) erfolgende Gleichung vom achten Grade bestimmte; ich muß indessen gestehen, daß die Approximatiosmethoden, auf dem Punct, worin sie jetzt stehen, vorzugsweise anzubringen sind, weil sie immer mit vieler Genauigkeit zu Resultaten führen, welche die geometrischen Constructionen nur sehr unvollkommen erreichen.

## Lehrsatz.

### §. 40.

**Wenn man von dreyen ungleichen, der Größe und Lage nach in einer Ebne gegebenen Kreisen,**

je zweyen und zweyen derselben die äußere Tangenten führt, bis sie einander schneiden, so werden die auf diese Art erhaltenen drey Durchschnittspuncte in einer geraden Linie liegen.

Es seyen Fig. 23.

$$\left.\begin{array}{l} x,\ y \\ x',\ y' \end{array}\right\} \text{die Coordinaten der Puncte} \left\{\begin{array}{l} M \\ M' \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{llll} C'C'' = a, & CC'' = a', & CC' = a'', & r \\ C'M = b, & CM' = b', & AC' = b'', & r' \\ \text{und } pC'' = h' & & & r'' \end{array}\right\} \text{die Halbmesser der Kreise} \left\{\begin{array}{l} C \\ C' \\ C'' \end{array}\right.$$

## Erster Beweis.

Da die Mittelpuncte der Kreise gegeben sind, so ist das Dreyeck $CC'C''$ bekannt; nach der Aufgabe des §. 24 wird also die Länge der durch die senkrechte $pC''$ gebildeten Segmente für $pC'$ seyn

$$\frac{a''^2 + a^2 - a'^2}{2a''},$$

und für $pC$

$$\frac{a''^2 + a'^2 - a^2}{2a''}.$$

Ferner hat man nach dem Satze des §. 33.

$$C'M = b = \frac{ar'}{r'' - r'}$$

$$CM' = b' = \frac{a'r}{r'' - r},$$

und

$$AC' = b'' = \frac{a''r'}{r - r'};$$

und da der Sinus des Winkels $pC'C'' = \frac{pC''}{C'C''} = \frac{PM}{C'M'}$

so wie der Sinus des Winkels $pCC'' = \frac{pC''}{CC''} = \frac{P'M'}{CM'}$; so wird man durch die analytischen Ausdrücke dieser Werthe die beyden Gleichungen erhalten

$$\frac{h}{a} = \frac{y\,(r'' - r)}{ar'}, \quad \frac{h}{a'} = \frac{y'(r'' - r')}{a'r},$$

aus welchen man zieht

$$y = \frac{hr'}{r'' - r'}, \quad y' = \frac{hr}{r'' - r}.$$

Damit nun der Lehrsatz statt finde, ist es erforderlich, daß die Abcissen x, x' mit den Ordinaten y, y' in einerley Verhältniß stehen. Man suche daher die Werthe von AP und von AP' in eben den Functionen als die der Ordinaten PM, P'M', und in dieser Hinsicht bemerke man, daß der Cosinus des Winkels $pC'C'' = \frac{pC'}{C'C''} = \frac{PC'}{C'M'}$ und daß der des Winkels $pCC'' = \frac{pC}{CC''} = \frac{P'C}{CM'}$; diese Größen werden also werden

$$\frac{a''^2 + a^2 - a'^2}{2\,a''a} = \frac{PC'\,(r'' - r')}{ar'}$$

$$\frac{a''^2 + a'^2 - a^2}{2a''a'} = \frac{P'C\,(r'' - r)}{a'r},$$

welches giebt

$$PC' = \frac{(a''^2 + a^2 - a'^2)\,r'}{2\,a''\,(r'' - r')},$$

und

$$P'C = \frac{(a''^2 + a'^2 - a^2)\,r}{2\,a''\,(r'' - r)}.$$

Hieraus schließen wir, daß

$$x = AC' - PC' = \frac{a''r'}{r-r'} - \frac{(a''^2 + a^2 - a'^2)\,r'}{2a''(r''-r')},$$

und daß

$$x' = AC + P'C = \frac{a''r}{r-r'} + \frac{(a''^2 + a'^2 - a^2)\,r}{2a''(r''-r)}.$$

Bringt man die Glieder der zweyten Theile dieser Gleichungen auf einerley Benennung, so gelangt man zu

$$x = \frac{r'[2a''^2(r''-r') - (a''^2 + a^2 - a'^2)(r-r')]}{2a''(r-r')(r''-r)},$$

und

$$x' = \frac{r[2a''^2(r''-r) + (a''^2 + a'^2 - a^2)(r-r')]}{2a''(r-r')(r''-r)}.$$

Da nun in diesen letztern Ausdrücken die gebrochenen Multiplicatoren $\frac{r'}{r''-r'}$, und $\frac{r}{r''-r}$ einander gleich sind, wie man sich durch die Entwicklung überzeugen kann, so folgt, daß man hat

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'};$$

welches bewiesen werden sollte.

Ungeachtet der obige Beweis von Seiten der Genauigkeit nichts zu wünschen übrig läßt, so glauben wir doch, daß man den, welchen wir noch sogleich von diesem Lehrsatze geben wollen, nicht ohne Interesse lesen wird. Um nicht unnöthigerweise eine neue Bezeichnung anzunehmen, wollen wir bis auf einige kleine Abändrungen, die gleich angezeigt werden sollen, von der vorhergehenden Gebrauch machen.

Zweyter Beweis.

Durch den Punct $C''$ führe man die Gerade $RC''$,

welche wir durch d bezeichnen wollen, der AX parallel; und wir wollen vorläufig annehmen, daß die Durchschnittspuncte A, M, M' der Tangenten zu je zweyen und zweyen nicht in gerader Linie seyen, und daß sie die gebrochene Linie AMm bilden. Man mache Cm $= \beta$ und CM' $= \beta'$, und betrachte M' nur als den Durchschnittspunct der durch die Mittelpuncte C, C'' geführten Geraden CC'' mit der durch die Durchschnittspuncte A, M der Tangenten zu je zweyen und zweyen, geführten Geraden AM.

Dieses vorausgesetzt, geben die ähnlichen Dreyecke RC''M', ACM' die Proportion

$$d : C''M', (a'+\beta') = AC, (a''+b'') : CM', (\beta'),$$

woraus folgt

$$d\beta' = (a' + \beta') (a'' + b''),$$

oder, um abzukürzen

$$d\beta' = (a' + \beta') h,$$

und folglich

$$\beta' = \frac{a'h}{d - h}.$$

Wird ferner der Punct m als der Durchschnittspunct der den beyden Kreisen C und C'' gemeinschaftlichen Tangenten betrachtet, so hat man vermittelst der ähnlichen Dreyecke C''n''m, Cnm

$$\beta = \frac{a'r}{r'' - r};$$

aus dieser Gleichheit und der vorigen erhält man also, wenn die eine durch die andre dividirt wird,

$$\beta (hr'' - hr) = \beta' (dr - hr) \quad . \ . \ (A).$$

Ich bemerke nun, daß lediglich vom Zusammenfal-

len der Puncte m, M′ die Wahrheit des vorgelegten Satzes abhängt; und in diesem Falle kommt es nur darauf an zu untersuchen, ob die Gleichung

$$hr'' - hr = dr - hr$$

statt hat, oder ob

$$hr'' = dr.$$

In dieser Hinsicht wollen wir zuvörderst zu dem schon im ersten Beweise gebrauchten Ausdruck von C′A unsre Zuflucht nehmen, oder zu dem welchen die ähnlichen Dreyecke CNA, C′N′A unmittelbar darbiethen; auf der einen und der andern Art hat man

$$b'' = \frac{a''r'}{r - r'},$$

oder

$$r = \frac{(a'' + b'')\,r'}{b''};$$

und folglich

$$dr = (a'' + b'')\,\frac{dr'}{b''} = \frac{hdr'}{b''}.$$

Andrerseits werden im Dreyecke RC″M die Linien RC″, AC′, welche nach der Construction parallel sind, in den Puncten K, k durch die Gerade MK in proportionale Theile geschnitten werden, man hat also diese Proportion

$$AC', (b'') : RC'', (d) = C'k : C''K;$$

aber

$$C'k : C''K = r' : r'',$$

also

$$b'' : d = r' : r'',$$

woraus folgt

$$r'' = \frac{dr'}{b''};$$

mithin

$$hr'' = \frac{hdr'}{b''};$$

die Gleichung (A) reducirt sich also auf

$$\beta = \beta';$$

es wird also endlich der Durchschnittspunct m der Tangenten mit dem auf der Verlängerung der Geraden AM gelegenen Punct M′ zusammen fallen.

Setzt man in der Gleichung (A) $r'' = r$, so wird man erhalten Fig. 24.

$$\beta = \beta' \left(\frac{dr - hr}{o}\right);$$

eine unendliche Größe, welche uns anzeigt, nicht nur, daß die Tangenten M′n″, M′K einander parallel sind, sondern auch, daß die Linie CC″, welche die Mittelpuncte der gleichen Kreise verbindet, der Geraden AM parallel ist, welche durch die Durchschnittspuncte der den beyden ungleichen Kreisen gemeinschaftlichen Tangenten geht (Fig. 24.). Dieser Satz, dessen meines Wissens nirgends Erwähnung geschieht, ist nichts desto weniger elegant; man kann nach dem Vorhergehenden leicht davon einen Beweis à priori geben, und wir wollen für die mit der Geometrie der Oberflächen vertrauten Leser anmerken, daß eben dieser Satz sehr natürlich auf folgenden führt.

Wenn von dreyen der Lage und Größe nach gegebenen Kugeln zwey gleich sind, so ist der gemeinschaftliche Durchschnitt der durch die Mittelpuncte der drey Kugeln

gehenden Ebne und der sie berührenden Ebne immer der Geraden parallel, welche die Mittelpuncte der beyden gleichen Kugeln verbindet.

## Lehrsatz.

### §. 41.

Wenn man aus einer beliebigen Anzahl Puncte einer in Rücksicht auf irgend eine Curve von der zweyten Ordnung der Lage nach gegebenen Geraden, Fig. 25., dieser Curve immer paarweise Tangenten führt, so werden alle Linien, welche die Berührungspuncte eines und desselben Paares dieser Tangenten verbinden, einander in einem und demselben Puncte schneiden; und umgekehrt.

Es seyen

$$AT = \alpha, \quad TT' = \beta',$$

wo TT' die gegebene Linie ist.

Es seyen überdies

$$\left.\begin{matrix} X', y' \\ x', Y \end{matrix}\right\} \text{die Coordinaten der Puncte} \left\{\begin{matrix} m' \\ M'. \end{matrix}\right.$$

## Beweis.

Wir wollen zuvörderst annehmen, daß die Curve der zweyten Ordnung eine durch

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

ausgedrückte Ellipse sey.

Die Gleichung der Tangente, welche unterworfen

ist durch einen Punct zu gehen, dessen positive Coordinaten $\alpha$, $\beta$ sind, ist nach §. 20.

$$y = \frac{a^2b^2 - b^2\alpha x}{a^2\beta}.$$

Um nun die Coordinaten der Berührungspuncte zu finden, muß man x und y in den vorhergehenden Gleichungen einerley Werthe beylegen. Substituirt man also in der Gleichung der Curve den aus der Gleichung der Tangente erfolgenden Werth für y, so wird man haben

$$\frac{a^4b^4 + b^4\alpha^2x^2 - 2a^2b^4\alpha x}{a^2\beta^2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

welches giebt

$$x = \frac{a^2b^2\alpha \pm a^2\beta\sqrt{(\alpha^2b^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2)}}{a^2\beta^2 + \alpha^2b^2},$$

oder um abzukürzen

$$x = \frac{a^2\alpha b^2 \pm a^2\beta M}{N},$$

folglich

$$X' = \frac{a^2\alpha b^2 + a^2\beta M}{N}, \quad x' = \frac{a^2\alpha b^2 - a^2\beta M}{N}.$$

Man kann leicht einsehen, daß weil die Gleichung der Tangente giebt

$$x = \frac{a^2b^2 - a^2\beta y}{\alpha b^2},$$

die Gleichung der Curve alsdann wird

$$a^4b^4 + a^4\beta^2y^2 - 2a^4b^2\beta y + a^2\alpha^2b^2y^2 = a^2\alpha^2\beta^4,$$

woraus man zieht

$$y = \frac{a^2\beta b^2 \pm \alpha b^2 M}{N},$$

folglich

$$Y' = \frac{a^2\beta b^2 + \alpha b^2 M}{N}, \quad y' = \frac{-a^2\beta b^2 + \alpha b^2 M}{N} \text{ *)}.$$

Wir wollen nun annehmen, daß wenn es möglich wäre, die Sehnen Mm, M′m′ einander in einem von dem auf der Axe AX genommenen Punct P, verschiedenen Punct V schnitten; so wird man bey der Annahme, daß die drey Puncte M′, V, m′ in gerader Linie liegen, die Proportion haben

$$X' - x' : Y' + y' = X' - \frac{a^2}{\alpha} : RV \text{ **)},$$

welche vermittelst der analythischen Werthe sich in

$$\frac{2a^2\beta M}{N} : \frac{2\alpha b^2 M}{N} =$$

$$\frac{a^2\alpha^2 b^2 + \alpha a^2\beta M - a^4\beta^2 - a^2\alpha^2 b^2}{\alpha N} : VR,$$

verwandelt, woraus folgt

$$VR = \frac{\alpha b^2 M - a^2\beta b^2}{N}.$$

---

*) Der Werth von y′, welcher mit dem zweyten von y correspondirt, ist negativ genommen, weil y′ unterhalb der Axe der Abcissen liegt.

**) In der That hat man, weil der Anfangspunct in A, weil AT = $\alpha$ und AB = o ist,

$$\text{Subtangete } PT = \frac{a^2 - AP^2}{AP};$$

folglich

$$PT + AP = \alpha = \frac{a^2 - AP^2}{AP} + AP;$$

also endlich

$$AP = \frac{a^2}{\alpha}.$$

Aber

$$p'm' = y'$$

hat genau zum Werth den von VR; also

$$VR = p'm';$$

es fällt daher der Punct V mit dem Puncte P zusammen, wo man auch übrigens den auf der gegebenen Geraden TT′ gewählt haben mag, um den Durchschnitt der Tangenten TM′, T′m′ darzustellen.

Wenn die Ellipse sich in einen Kreis verwandelte, so würde der Satz deshalb nicht minder wahr seyn; denn der Kreis ist, wie man weiß, nur eine Ellipse, deren Axen gleich sind; und durch eine der eben gebrauchten durchaus ähnlichen Analysis gelangt man zum Beweise eben dieses Satzes für den Fall der beyden andern Curven der zweyten Ordnung. Man bemerkt indessen gleich, daß, weil die Parabel von einem Mittelpuncte entblößt ist, es nothwendig seyn würde, den Anfangspunct der Coordinaten auf einen Punct der Curve überzutragen. Man wird in dieser Hinsicht die Gleichung der Parabel,

$$y^2 = px,$$

und die im §. 18. für ihre Tangente erhaltene

$$y = \frac{px - \alpha p}{2\beta}$$

anbringen. Nimmt man dann diese beyden Gleichungen, um daraus die Coordinaten der Berührungspuncte M′m′ (Fig. 26.) herzuleiten, so wird man haben

$$X' = \left(\alpha + \frac{2\beta^2}{p}\right) + \frac{2\beta}{p}\sqrt{(\alpha p + \beta^2)} = N' + \frac{2\beta M'}{p}$$

$$x' = \left(\alpha + \frac{2\beta^2}{p}\right) - \frac{2\beta}{p}\sqrt{(\alpha p + \beta^2)} = N' - \frac{2\beta M'}{p}$$

$$Y' = \beta + \sqrt{(\alpha p + \beta^2)} = \beta + M'$$

$$y' = -\beta + \sqrt{(\alpha p + \beta^2)} = -\beta + M'.$$

Weil nun die Puncte M′, V, m′ in gerader Linie gedacht werden müssen, so muß man wie im Vorhergehenden die Proportion haben

$$X' - x' : Y' + y' = \alpha - x' : RV,$$

oder in analythischen Werthen

$$\frac{4\beta M'}{p} : 2M' = \frac{-2\beta^2}{p} + \frac{2\beta M'}{p} : RV,$$

woraus man zieht

$$RV = -\beta + M' = y' = RP;$$

die vorgetragene Eigenschaft ist also allen Curven der zweyten Ordnung gemein.

Man könnte vielleicht geneigt seyn zu glauben, daß unser Beweis wesentlich auf der Bedingung der Perpendicularität der Linien AX, TT′ beruht; erinnert man sich indessen an das, was im §. 23. gesagt worden, so kann die Linie TT′ auf die Axe schief fallen, ohne daß die Folgerungen von denen verschieden werden, welche wir daraus gezogen haben. Man muß nur das System der Coordinaten auf die Durchmesser der Curven der zweyten Ordnung dergestalt übertragen, daß die Ordinaten der Linie TT′ parallel seyen.

Was den Beweis des umgekehrten von dem uns beschäftigenden Satze betrift, so glauben wir, daß diese Vorbereitungen hinreichend sind, um ihn mit Vortheil

selbst ausführen zu können. Es würde der Entwickelung ihrer Geistesfähigkeit nachtheilig seyn, wenn wir uns sehr über das Detail und der Anwendung der Methoden auslassen wollten.

## Aufgabe.

### §. 42.

Wenn zwey Puncte B, C Fig. 27. der Lage nach gegen einen bekannten Kreis gegeben sind, auf dem Umkreise einen Punct M zu finden, von welchem nach dem Mittelpuncte A, und nach den gegebenen Puncten die Geraden AM, MB, MC geführt, diese mit einander zwey Winkel AMB, AMC einschließen, deren Sinus sich wie m : n verhalten.

Man verbinde die gegebenen Puncte durch die Gerade BC, und vom Puncte A, dem Mittelpuncte des gegebenen Kreises fälle man auf diese Gerade die senkrechte AY, welche man für die Axe der Ordinaten nehme, und führe die Gerade AX der BC parallel, welches nicht ermangeln kann den Calcul zu vereinfachen. Endlich fälle man von den Puncten B, C auf AX die senkrechten BH, CK.

Nun seyen

$$AH = \alpha, \quad AK = \alpha', \quad BH = CK = \beta,$$

und x, y die Coordinaten des gesuchten Punctes M.

## Auflösung.

Die Gerade BM, welche durch einen Punct B gehen muß, dessen Coordinaten $\alpha$, $\beta$ sind, bildet mit der

Axe der Abcissen einen Winkel, dessen Tangente A zum Ausdrucke hat.

$$A = -\frac{\beta - y}{\alpha + x}.$$

Eben so bildet die Gerade MC mit der Axe AX einen Winkel, dessen Tangente

$$A' = \frac{\beta - y}{\alpha' - x}$$

ist.

Endlich wird die Tangente A″ des von der Geraden AM und der Axe der Abcissen gebildeten Winkels durch

$$A'' = \frac{y}{x}$$

ausgedrückt seyn. Nun hat nach §. 13. der Sinus des von den beyden Geraden AM, MQ gebildeten Winkels M′MC zum Ausdruck

$$\frac{(A'' - A')}{\sqrt{(1 + A'^2)}\sqrt{(1 + A''^2)}},$$

wo hier a′ und a durch A″, A′ ausgedrückt sind.

Hieraus leiten wir her, daß Sinus CMA oder

$$\text{Sinus } M'MC = \frac{y(\alpha' - x) - x(\beta - y)}{\sqrt{[(\alpha' - x)^2 + (\beta - y)^2]}\sqrt{(x^2 + y^2)}}.$$

Aus eben dem Grunde erhält man, wenn man A statt A′ substituirt, und von den oben beygebrachten analytischen Ausdrücken Gebrauch macht,

sin BMA,

oder

$$\sin AMN = \frac{y(\alpha + x) + x(\beta - y)}{\sqrt{[(\alpha + x)^2 + (\beta - y)^2]}\sqrt{(x^2 + y^2)}}.$$

Aber nach dem Vortrage der Aufgabe muß man diese Proportion haben

$$\sin AMB : \sin AMC = m : n,$$

woraus folgt

$$m \sin AMC = n \sin AMB.$$

Setzt man in diese Gleichung statt Sinus AMC und Sinus AMB ihre oben berechnete Werthe, so erhält man, nachdem sie von den Nennern befreyet und vereinfacht worden sind

$$(\alpha' ny - \beta nx) \sqrt{[(\alpha + x)^2 + (\beta - y)^2]}$$
$$= (\alpha my + \beta mx) \sqrt{[(\alpha' - x)^2 + (\beta - y)^2]} \ldots . (1);$$

hält man diese Gleichung gegen die des gegebenen Kreises

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

so würde man zu einer Gleichung vom sechsten Grade in x gelangen, und wendet man das Verfahren des §. 159. L, C an, so würde man die Abcisse AP des gesuchten Punctes erhalten *). Zu diesem Resultat ist Descartes im 65sten seiner Briefe, 3ter Theil, gelangt. Es ist merkwürdig, daß die Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe, selbst für den Vortrag dieser Aufgabe, auf eine sehr einfache Art gegeben ist.

**Drey Puncte** A, B, C Fig. 28. sind gegeben; auf den Entfernungen AB, BC als Durchmesser genommen, seyen Umkreise beschrieben, und aus dem

---

*) Es wird vielleicht nicht überflüßig seyn hier anzumerken, daß die Wurzeln der Gleichung (1) vermittelst der Gleichung (2) einer Vereinfachung fähig ist; und daher rührt es auch, daß die Endgleichung in x nur vom sechsten Grade ist.

dem Puncte A so viele Sehnen AD, AE als man will geführt, die aber immer ein und dasselbe Verhältniß zu einander haben; man will nun die Natur der Curve wissen, auf welcher sich die Durchschnittspuncte M der Geraden EC, BD befinden.

Wendet man unsre Analysis auf diese Aufgabe gehörigermaaßen an, und nimmt AD und AE in dem Verhältniß von m : n, das heißt von sin AMB : sin AMC, so würde man auf die Gleichung (1) zurück kommen, woraus folgt, daß wenn der Durchschnitt der Geraden EC, DE sich auf dem gegebenen Umkreis darstellen sollte, der Punct M dem ersten Satze ein Genüge leistet; und dieses ist ohne irgend eine Rechnung leicht einzusehen.

## Aufgabe.

### §. 43.

Wenn ein Punct M in einem bekannten Winkel BAX der Lage nach gegeben ist, die Coordinaten des Mittelpunctes eines Kreises zu finden, welcher die Gerade AX berührt, und die Seite AB dergestalt schneidet, daß der im Kreise liegende Theil mm′ von einer gegebenen Größe sey.

Es seyen Fig. 29. $\alpha$, $\beta$ die Coordinaten des Punctes M;

$$mm' = 2p;$$

die Tangente des Winkels BAX = a.

Es seyen überdieß

$$\left.\begin{matrix}\alpha' \\ \beta'\end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix}x \\ y\end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix}x' \\ y'\end{matrix}\right\}$$

Die Coordinaten der Puncte

M′ m m′;

und da der Kreis die AX berühren muß, so wird sein Halbmesser gleich $\beta'$ seyn.

## Auflösung.

Die Gleichung des gesuchten Kreises fur irgend einen Punct seines Umfangs ist (§. 15.)

$$(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 = \beta'^2 \quad \ldots\ldots (1)$$

und für den gegebenen Punct

$$(\alpha-\alpha')^2 + (\beta-\beta')^2 = \beta'^2 \quad \ldots\ldots (2);$$

ferner ist die Gerade AB durch

$$y = ax \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

gegeben, und in Rücksicht des Abstandes mm′ hat man

$$4p^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 \quad \ldots\ldots (4).$$

Da alle Bedingungen der Aufgabe in Gleichungen ausgedrückt sind, und da es dieser letztern eine hinreichende Anzahl giebt, um die unbekannten zu bestimmen, so wird man eine Endgleichung in $\alpha'$ oder in $\beta'$ erhalten. Dieses ist das Detail der Elimination.

Werden die Gleichungen (1) und (3) gegen einander gehalten, so werden sie die Werthe von x, y und von x′, y′ bestimmen, das heißt die Coordinaten der Durchschnittspuncte m, m′, weil im Allgemeinen eine gerade Linie den Umkreis nur in zweyen Puncten treffen kann. Man findet in der That

$$x = \frac{a\beta' + \alpha' \pm \sqrt{(a^2\beta'^2 - a^2\alpha'^2 + 2a\alpha'\beta)}}{1 + a^2}$$

und

$$y = \frac{a\alpha' + a^2\beta' \pm a\sqrt{(a^2\beta'^2 - a^2\alpha'^2 + 2a\alpha'\beta')}}{1 + a^2},$$

Wenn man nun die Werthe dieser Ausdrücke in Beziehung auf die obern Zeichen durch x, y bezeichnet, und durch x′, y′ die Werthe nach den untern Zeichen genommen, so wird man haben, nachdem x, y und x′, y′ aus der Gleichung (4) eliminirt, und die Nenner hinweg geschafft worden

$$4p^2(a^2+1)^2 =$$
$$4a^2\beta'^2(a^2+1) - 4a^2\alpha'^2(a^2+1) + 8a\beta'(a^2+1)\alpha',$$

oder, wenn man vereinfacht und zur Abkürzung

$$a^2 + 1 = m^2$$

setzt, wird man finden

$$p^2m^2 = a^2\beta'^2 - a^2\alpha^2 + 2a\alpha'\beta' \;{}^{*)}.$$

Trägt man nun das Glied $a^2\alpha'^2$ in den ersten Theil über, und setzt zu beyden Seiten $\alpha'^2$ hinzu, so wird man haben

$$p^2m^2 + \alpha'^2(a^2+1) = a^2\beta'^2 + 2a\alpha'\beta' + \alpha'^2.$$

---

*) Man würde sogleich zu diesem Resultate gelangen, wenn man von dieser Betrachtung ausginge, daß im Kreise jede vom Mittelpuncte M′ auf eine Sehne mm′ gefällte senkrechte M′N diese Sehne halbirt. In der That wird, da die Coordinaten des Punctes M′ durch $\alpha'$ und $\beta'$ bezeichnet sind, der Ausdruck der senkrechten M′N nach §. 12. seyn $-\frac{\beta - a\alpha}{\sqrt{(1+a^2)}}$ oder $\frac{a\alpha - \beta}{\sqrt{(1+a^2)}}$; und da mN = p und mM′ = $\beta'$, so wird das rechtwinklichte Dreyeck mNM′ zwischen seinen Seiten diese Beziehung darbiethen $\frac{(a\alpha - \beta')^2}{1+a^2} + p^2 = \beta'^2$; welche, wenn sie entwickelt wird, mit dem Resultate, worauf es hier ankommt, völlig identisch ist.

Zieht man endlich die Quadratwurzel und erwägt man, daß $a^2 + 1 = m^2$, so wird kommen

$$m \sqrt{(\alpha'^2 + p^2)} = a\beta' + \alpha'.$$

Aus der Gleichung (2) zieht man, wenn $\alpha^2 + \beta^2$ durch $\gamma^2$ bezeichnet wird,

$$\beta' = \frac{\gamma^2 + \alpha'^2 - 2\alpha\alpha'}{2\beta}.$$

Substituirt man diesen Werth in die vorhergehende Gleichung, so wird daraus erfolgen, nachdem man das Wurzelzeichen und den Nenner hinweg geschaft, und nach der unbekannten $\alpha'$ geordnet hat

$$\left.\begin{array}{l} a^2\alpha'^4 + \left.\begin{array}{r} 4a\beta \\ -4a^2\alpha \end{array}\right| \alpha'^3 + \left.\begin{array}{r} 4(\beta^2 - 2a\alpha\beta + a^2\alpha^2) \\ +2a^2\gamma^2 \\ -4\beta^2 m^2 \end{array}\right| \alpha'^2 \\ \quad + \left.\begin{array}{r} 4a\beta\gamma^2 \\ -4a^2\alpha\gamma^2 \end{array}\right| \alpha' + \begin{array}{l} a^2\gamma^4 \\ -4\beta^2 m^2 p^2 \end{array} \end{array}\right\} = 0,$$

woraus man sieht, daß der Werth der Abcisse $\alpha'$ des gesuchten Berührungspunctes von einer Formel vom vierten Grade abhängt; um aber dieser Formel eine etwas einfachere Form zu geben, wollen wir zuvörderst alle ihre Glieder homogen machen, indem wir überall, wo es nöthig ist, die Potenzen der Einheit ersetzen, welche willkührlich genommen werden kann (§. 95. L. C.). In dieser Hinsicht sey $1 = \alpha$, so hat man vermöge des Gesetzes Homogenität

$$\left.\begin{array}{l} a^2\alpha'^4 + 4(a\alpha\beta - a^2\alpha)\,\alpha'^3 \\ \left.\begin{array}{r} +4(\alpha\beta - a\alpha)^2 \\ +2a^2\gamma^2 \\ -4\beta^2 m^2 \end{array}\right\} \alpha'^2 + 4\gamma^2(a\alpha\beta - a^2\alpha)\,\alpha' + \begin{array}{l} a^2\gamma^4 \\ -4\beta^2 m^2 p^2 \end{array} \end{array}\right\} = 0;$$

dividirt man alles durch $a^2$, und setzt man mehrerer Einfachheit wegen

$$\frac{\alpha\beta}{a} = e, \qquad \frac{\beta m}{a} = f,$$

so wird endlich kommen

$$\alpha'^4 + 4(e-\alpha)\alpha'^3 + \left.\begin{matrix} +4(e-\alpha)^2 \\ +2\gamma^2 \\ -4f^2 \end{matrix}\right\} \alpha'^2 + \left.\begin{matrix} 4\gamma^2(e-\alpha)^2\alpha' + \gamma^4 \\ -4f^2p^2 \end{matrix}\right\} = 0.$$

Es ist sehr merkwürdig, daß diese letztere auf einem wirklich analytischen Weg erhaltene Gleichung mit der einerley ist, zu welcher andre Schriftsteller vermittelst einiger Vorbereitungs-Constructionen gelangt sind (S. über diesen Gegenstand die Geometrie von Bossut Seite 315.). Noch mehr, diese Constructionen, die man zuerst erfinden mußte, sind selbst durch die Werthe von e und f angezeigt; denn wenn man durch den gegebenen Punct den Geraden AF, AP respectiv die Parallele DM, ME zieht, so werden die Theile DP, AE zum Ausdruck haben

$$\frac{\alpha\beta}{a} \text{ und } \frac{\beta m}{a};$$

wo die Linie PF immer als die Tangente des Winkels A betrachtet wird. Diese Uebereinstimmung der Resultate ist also ein Beweis von der Allgemeinheit der Methode, die wir angenommen haben.

# Dritter Abschnitt.

## Von den unbestimmten Aufgaben.

Die Analysis der Sätze, welche den Gegenstand des vorhergehenden Abschnitts ausmachen, führt immer auf so viele Gleichungen als Größen zu entdecken sind; wenn aber das Gegentheil eintritt, so enthält die aus der möglichsten Elimination der unbekannten erfolgende Endgleichung, nothwendigerweise deren mehrere; und da man keine der übrig bleibenden bestimmen kann, ohne vorher jeder der andern irgend einen Werth beyzulegen, so wird die auf diesen Umstand führende Aufgabe eine unbestimmte genannt. Wenn die Auflösung einer solchen Aufgabe auf eine Gleichung führt, welche nur zwey unbekannte oder veränderliche Größen enthält, so ist die Curve, zu welcher diese Gleichung gehört, immer eben, oder von einfacher Krümmung; von diesen soll jetzt gehandelt werden.

### Aufgabe.

§. 44.

**Eine Gerade und ein Punct außerhalb dieser Geraden sind der Lage nach in Rücksicht auf zwey rechtwinklichte Axen gegeben; die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch diesen Punct geht, und mit der gegebenen Geraden einen bekannten Winkel bildet.**

Es seyen $\alpha$ und $\beta$ die Coordinaten des gegebenen Punctes M Fig. 30.

$$y = ax + b$$

die Gleichung der bekannten Geraden CB, und t die Tangente des gegebenen Winkels.

### Auflösung.

Die Gleichung der gesuchten Geraden MQ ist

$$y - \beta = a' (x - \alpha);$$

da ferner der Winkel MQB dem gegebenen Winkel gleich seyn muß, dessen Tangente t ist, so wird man vermöge §. 14. haben

$$\frac{a' - a}{aa' + 1} = t;$$

zieht man den Werth der unbekannten aus, so wird man erhalten

$$a' = \frac{t + a}{1 - at},$$

und alsdann wird die Gleichung der Geraden MQ seyn

$$y - \beta = \left(\frac{t + a}{1 - \alpha t}\right) (x - \alpha).$$

Wollte man statt des Winkels MRP noch einen andern Punct der Geraden MR, als M, zum Beyspiel den Punct R haben, so würde man in der vorhergehenden Gleichung $y = 0$ setzen, und es würde für die Abeisse AR erfolgen

$$x = \alpha - \frac{\beta (1 - at)}{a + t}.$$

Wenn die gesuchte Gerade zwischen P und X gehen muß, so muß man, um mit der Betrachtung des §. 14. in Uebereinstimmung zu kommen, die Gleichung

$$\frac{a' + a}{1 - a'a} = b$$

anbringen.

## Aufgabe.

### §. 45.

**Wenn ein Winkel gegeben ist, einen Punct von der Beschaffenheit zu finden, daß die von demselben auf die Schenkel des Winkels gefällten senkrechten sich wie m : n verhalten.**

Es seyen $x'$, $y'$ die Coordinaten des gesuchten Punctes M, und a die Tangente des Winkels MAB Fig. 31.

## Auflösung.

Die Gleichung der Geraden AM ist

$$y = ax,$$

und die vom Puncte M' auf AM gefällte senkrechte MM' hat zum Ausdruck

$$-\frac{y' - ax'}{\sqrt{(1 + a^2)}};$$

also muß man nach der erforderlichen Bedingung die Proportion haben

$$\frac{ax' - y'}{\sqrt{(1 + a^2)}} : y' = m : n,$$

welches giebt

$$n(ax' - y') = my' \sqrt{(1 + a^2)},$$

woraus man zieht

$$y' = \frac{nax'}{n + m\sqrt{(1 + a^2)}},$$

Wenn der Punct M′ oberhalb der Geraden AM liegen sollte, so würde die senkrechte MM′ positiv seyn (§. 12.), und man würde dann haben

$$y' = \frac{nax'}{n - m\sqrt{(1 + a^2)}}.$$

Es giebt also eine unendliche Anzahl Puncte, welche der Aufgabe ein Genüge thun, und ferner liegen alle diese Puncte auf einer Geraden, welche durch den Anfangspunct der Coordinaten geht, und mit der Axe der Abcissen einen Winkel einschließt, dessen trigonometrische Tangente ist

$$\frac{na}{n \pm m\sqrt{(1 + a^2)}}.$$

Diese Größe läßt sich folgendermaßen leicht construiren, wenn man zur Abkürzung nur das untere Zeichen der Wurzelgröße in Erwägung zieht.

Aus dem Scheitel A des gegebenen Winkels Fig. 32. errichte man auf AB die senkrechte AD dem n gleich, und aus eben demselben Punct A errichte man auf AC die senkrechte AD′ dem m gleich; alsdann führe man durch die Puncte D, D′ die Geraden DM′, D′M′ respectiv den Geraden AB, AC parallel, und verbinde den Durchschnittspunct M′ der erstern Geraden mit dem Puncte A; so wird die unbegränzte Gerade AM′ die gesuchte seyn.

Um sich von der Richtigkeit dieser Construction zu überzeugen, bemerke man, daß der Winkel D′AE = dem Winkel CAB, weil beyde den Winkel EAC zum Complement haben, woraus folgt (§. 2.), daß D′E = am,

und daß die Hypothenuse AE $= \sqrt{(a^2m^2 + m^2)} = m\sqrt{(a^2+1)} =$ QM′.

Es ist ferner klar, daß man, weil P′Q = P′M′ = QM′ haben muß

$$P'Q = n - m\sqrt{(1+a^2)}.$$

Dieses vorausgesetzt, ist die Gleichung der, der Geraden AC parallelen D′M′

$$y = ax + m\sqrt{(1+a^2)},$$

und die der, der Axe AB parallelen Geraden DM′, ist $y = n$; aus diesen beyden letztern Gleichungen zieht man also für die Abscisse AP′ des Durchschnittspunctes M′

$$x = \frac{n - m\sqrt{(1+a^2)}}{a},$$

und da die Tangente des Winkels M′AB $= \frac{P'M'}{AP'}$, so wird man haben, wenn man die analytischen Ausdrücke anbringt,

$$\frac{P'M'}{AP'} = \frac{na}{n - m\sqrt{(1+a^2)}},$$

woraus folgt, daß die Gleichung der Geraden AM′ ist

$$y = \frac{nax}{n - m\sqrt{(1+a^2)}}.$$

## §. 46.

Aus der vorhergehenden Auflösung leitet man als unmittelbare Folge die Art her, einen Punct zu finden, von welchem auf drey der Lage nach gegen einander gegebenen Linien, senkrechte gefällt, diese senkrechten

in den bekannten Verhältnissen von m : n : p stehen sollen. Die Construction, die zur gegenwärtigen Aufgabe erforderlich ist, läßt sich folgendermaßen bewerkstelligen.

Es seyen AB, AC, CD Fig. 33. die gegebenen Geraden; so bestimme man nach dem eben befolgten Verfahren die Richtung der Geraden AM dergestalt, daß die senkrechten MN, NP in dem Verhältniß von m : n seyen. Man bestimme desgleichen die Richtung der Geraden MC dergestallt, daß die senkrechten MP, MQ in dem Verhältniß von n : p stehen; so wird der Durchschnittspunct M der Geraden AM, MC der Punct seyn, welcher allein der verlangten Bedingung ein Genüge leistet.

## Aufgabe.

### §. 47.

**Es sind so viele Puncte als man will auf einer Ebne durch ihre rechtwinklichte Coordinaten gegeben; man soll eine gerade Linie dergestalt hindurch ziehen, daß wenn von diesen Puncten auf diese Gerade senkrechte gefällt werden, die Summe der senkrechten auf der einen Seite der der senkrechten auf der andern gleich sey.**

Wir wollen mehrerer Einfachheit wegen annehmen, daß die Anzahl der gegebenen Puncte nur drey sey; die bey diesem Fall angebrachten Betrachtungen lassen sich dann leicht auf eine größere Anzahl von Puncten ausdehnen:

Es seyen Fig. 34.

$$\left.\begin{matrix}\alpha,\ \beta\\ \alpha',\ \beta'\\ \alpha'',\ \beta''\end{matrix}\right\}\ \text{die respectiven Coordinaten der Puncte}\ \left\{\begin{matrix}M\\ M'\\ M''.\end{matrix}\right.$$

### Auflösung.

Da diese Aufgabe offenbar unbestimmt ist, so wollen wir annehmen, daß CD eine von der Geraden sey, welche der Aufgabe ein Genüge thün, und daß sie zur Gleichung habe

$$y = ax + b.$$

Da die Linien $pM$, $p'M'$, $p''M''$ auf dieser Geraden senkrecht seyn müssen, so werden ihre Längen respectiv seyn

$$\frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{(1 + a^2)}},\quad \frac{\beta' - a\alpha' - b}{\sqrt{(1 + a^2)}},\quad -\frac{\beta'' - a\alpha'' - b}{\sqrt{(1 + a^2)}},$$

indem man die unterhalb CD liegenden senkrechten negativ nimmt.

Vermöge des Vortrags der Aufgabe wird man also haben

$$\beta' - a\alpha - b + \beta' - a\alpha' - b = b + a\alpha'' - \beta'',$$

welches giebt

$$a = \frac{\beta + \beta' + \beta'' - 3b}{\alpha + \alpha' + \alpha''}.$$

Da diese Größe zwey unbekannte a und b enthält, so kann man keine derselben erhalten, ohne der andern einen Werth beyzulegen. Es sey daher $b = 0$, so wird man für die mit diesem Falle übereinstimmende Auflösung haben

$$a = \frac{\beta + \beta' + \beta''}{\alpha + \alpha' + \alpha''}.$$

Wenn einer der Puncte M unterhalb der Axe der Abcissen liegen sollte, so müßte man diesen Umstand dadurch anzeigen, daß man die Ordinate dieses Punctes in dem Ausdruck der correspondirenden senkrechten negativ nimmt.

## Aufgabe.

### §. 48.

Wenn irgend eine Anzahl Puncte gegeben ist, irgend einen von der Beschaffenheit zu finden, daß wenn man von demselben nach jedem andern eine gerade Linie zieht, die Summe der Quadrate dieser Geraden, einem gegebenenen Quadrate $q^2$ gleich sey.

Wir wollen, um die Rechnungen zu vereinfachen, annehmen, man habe nur drey gegebene Puncte, durch welche Einschränkung die Allgemeinheit der Auflösung gegenwärtiger Aufgabe nichts verlieren wird, und die Coordinaten der Puncte

A, A′, A″ Fig. 35.

wollen wir durch

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}\alpha''\\ \beta''\end{matrix}\right\}$$

bezeichnen.

Es seyen ferner x, y die Coordinaten des gesuchten Punctes M.

## Auflösung.

Nach der Annahme in der Figur wird man haben

$$AM^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$$
$$A'M^2 = (x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2$$
$$A''M^2 = (x-\alpha'')^2 + (y-\beta'')^2.$$

Entwickelt man diese Gleichungen und setzt ihre Summe gleich $q^2$, so erhält man, nachdem durch 3 dividirt worden

$$y^2 - \tfrac{2}{3}(\alpha+\alpha'+\alpha'')x + x^2 - \tfrac{2}{3}(\beta+\beta'+\beta'')y$$
$$= \frac{q^2 - (\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\beta^2+\beta'^2+\beta''^2)}{3}.$$

Diese Gleichung ist sehr merkwürdig; denn sie zeigt an, daß alle Puncte, welche der Aufgabe ein Genüge thun, auf dem Umkreise eines Zirkels liegen; und ferner ist der Mittelpunct dieses Kreises genau der Mittelpunct der parallelen Kräfte, die einander gleich und in den gegebenen Puncten A, A′, A″ ꝛc. angebracht, angenommen werden.

Denn um den Anfangspunct der Coordinaten in den Mittelpunct der Curve überzutragen, muß man in der vorhergehenden Gleichung $x' + \frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{3}$ statt x setzen, und $y' + \frac{\beta+\beta'+\beta''}{3}$ statt y; alsdann wird die erfolgende zusammengesetzte nur noch die zweyten Potenzen der veränderlichen Größen enthalten, und die völlig bekannte Größe wird der Ausdruck für den Halbmesser des zu construirenden Kreises seyn. Nachdem man also eine Abcisse gleich $\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{3}$, und eine correspondirende Ordinate gleich $\frac{\beta+\beta'+\beta''}{3}$ genommen; wird der äußer-

ste Punct dieser Ordinate zugleich der Mittelpunct des Kreises in der Aufgabe, und der Mittelpunct der Schwere der Puncte A, A′, A″ ꝛc. seyn.

Dieser Satz, welcher einer von denen der loca plana des Apolonius ist, kann auf eine unendliche Anzahl verändert werden; allein bey allen Modificationen biethet er analoge Folgerungen dar, als die von denen eben geredet worden. Man sehe über diesen Gegenstand, die Geschichte der Mathematik von Montucla, 1. Theil Seite 284, 2te Ausgabe.

## Aufgabe.

## §. 49.

**Wenn ein Punct in Rücksicht auf zwey auf einander senkrechte Axen gegeben ist, den Ort der Mittelpuncte aller Kreise zu bestimmen, welche durch diesen Punct gehen, und zugleich eine der Axen berühren.**

Es seyen Fig. 36. $\alpha$, $\beta$ die Coordinaten des gegebenen Punctes M; $x'$, $y'$ die des Mittelpunctes M′ des gesuchten Kreises, $r$ der unbekannte Halbmesser.

## Auflösung.

Da der Mittelpunct M′ eines der Kreise, die durch den Punct M gehen, und die Axe AY berühren müssen, eines Theils im Winkel YAX liegt, so wird die Gleichung des Umkreises seyn

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = r^2,$$

und für den Punct M dieses Umkreises hat man

$$(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2 = r^2;$$

da aber die Bedingung der Berührung des gegebenen Kreises mit der Axe AY durch $r = x'$ ausgedrückt ist, so hat man

$$(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2 = x'^2 ;$$

entwickelt und ordnet man, so kommt

$$y'^2 - 2\beta y' - 2\alpha x' + \alpha^2 + \beta^2 = 0;$$

die parabolische Curve ist also der Lauf der Mittelpuncte der Kreise, die mit der vorgetragenen Eigenschaft behaftet sind.

Wenn $\beta = 0$, oder, welches einerley ist, wenn die Axe der Abcissen durch den gegebenen Punct geht, hat man schlechtweg

$$y'^2 = 2\alpha x' - \alpha^2.$$

Um den Scheitel der Parabel zu finden, setze man in dieser letztern Gleichung $y = 0$, und man wird haben

$$x = \frac{\alpha}{2}.$$

Der kleinste Kreis, welcher dem Vortrage der Aufgabe ein Genüge thut, hat also zum Halbmesser die Hälfte der Abcisse des gegebenen Punctes.

## Aufgabe.

### §. 50.

Wenn eine Gerade der Lage nach gegen einen Kreis gegeben ist, den Zug der Mittelpuncte aller Kreise zu finden, welche zugleich den Kreis und die gegebene Gerade berühren.

Es sey AX Fig. 37. die gegebene Linie; vom Mittelpuncte C fälle man auf diese Linie eine senkrechte AC, welche

welche für die Axe der Ordinaten genommen werden kann, und es seyen

$$AC = b, \quad AP' = x', \quad P'C' = y';$$

r der Halbmesser CR des gegebenen Kreises.

## Auflösung.

Der Abstand CC' wird in einer Function der Coordinaten seiner äußersten Puncte durch

$$(r + y')^2 = (b - y')^2 + x'^2.$$

Verrichtet man die angezeigten Entwickelungen, so erhält man nach gemachter Reduction

$$x'^2 = 2(b + r)\,y' - (b^2 - r^2);$$

wenn $x' = 0$ hat man

$$y' = \frac{b^2 - r^2}{2(b + r)} = \frac{b - r}{2},$$

woraus folgt, daß für den Fall der Figur, der Mittelpunct des kleinsten berührenden Kreises auf der Mitte des Abstandes der gegebenen Geraden und des gegebenen Kreises liegt. Es kann sich zutragen, daß dieser letztere Kreis von der Geraden AX geschnitten oder berührt wird, welches verschiedene Fälle darbiethet, die leicht zu behandeln sind.

## Aufgabe.

### §. 51.

**Durch zwey gegebene Puncte zwey auf einander senkrechte Linien zu führen.**

Es seyen Fig. 38.

$$\left.\begin{matrix}\alpha, \beta \\ \alpha', \beta'\end{matrix}\right\} \text{die Coordinaten der Puncte} \left\{\begin{matrix}M \\ M'.\end{matrix}\right.$$

## Auflösung.

Die Gleichung der Geraden MN, welche unterworfen ist durch einen gegebenen Punct zu gehen, und mit der Axe der Abcissen irgend einen Winkel zu bilden, ist

$$y - \beta = A (x - \alpha);$$

die Gleichung der Geraden M'N', die darauf senkrecht seyn soll, ist

$$y - \beta' = - \frac{1}{A} (x - \alpha').$$

damit nun der Punct M'' den beyden vorgelegten Geraden gemein sey, müssen x und y in den Gleichungen dieser Geraden dieselben Werthe haben. Nächst dieser Annahme eliminire man die Tangente A, und man wird haben

$$(y - \beta) (y - \beta') = (\alpha' - x) (x - \alpha),$$

oder, wenn man entwickelt und alle Glieder in den ersten Theil bringt

$$y^2 + x^2 - (\beta' + \beta) y - (\alpha' + \alpha) x + \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0.$$

Da diese Gleichung, die des Kreises zwischen seinen Coordinaten ist, so folgt, daß es eine unendliche Anzahl Puncte giebt, von denen nach den gegebenen Puncten M, M' Gerade geführt, diese Geraden einen Quadranten einschließen werden.

Wenn $\alpha = \beta = \beta' = 0$, das heißt, wenn die Axe der Abcissen durch die beyden gegebenen Puncte geht, und der Anfangspunct in M ist, so wird die Endgleichung

$$y^2 - \alpha' x + x^2 = 0;$$

hier ist indessen eine andre Aufgabe, von welcher diese nur ein besondrer Fall ist.

## §. 52.

**Durch zwey gegebene Puncte zwey Gerade zu führen, welche mit einander einen bekannten Winkel einschließen.**

Es sey Fig. 9. t die Tangente des gegebenen Winkels, und wir wollen annehmen, welches immer möglich ist, daß die Puncte A, P′ auf der Axe der Abcissen liegen. Es sey überdieß $AP' = \alpha'$.

### Auflösung.

Die Gerade AM, welche durch den Anfangspunct geht, hat zur Gleichung

$$y = ax;$$

und die durch einen auf der Axe genommenen Punct gehende Gerade P′M ist

$$y = -a'(x - \alpha).$$

Andrerseits wird, da die Tangente des Winkels AMP′ durch t ausgedrückt ist, die Tangente des Supplements oder die des Winkels NMP′ durch $-t$ ausgedrückt seyn; man wird also nach §. 14. haben

$$t = \frac{-a' - a}{1 - a'a},$$

woraus man zieht

$$a = \frac{t + a'}{a't - 1}.$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung der Geraden AM, so wird kommen

$$y = \frac{(a' + t)\, x}{a't - 1} x;$$

und eliminirt man a′ vermittelst dieser und der Gleichung

der Geraden P'M, so gelangt man zu einer Beziehung bloß zwischen x, y; diese Beziehung ist

$$x^2 + y^2 - \alpha x - \frac{\alpha y}{t} = 0 \text{ (A)},$$

und zeigt, daß alle gleiche Winkel AMP' ihre Scheitel auf dem Umkreise eines Zirkels haben.

Wenn der gegebene Winkel AMP' ein rechter ist, so ist seine Tangente t unendlich, und alsdann verschwindet das letzte Glied der Gleichung (A); so daß man nur hat

$$x^2 + y^2 - \alpha x = 0,$$

wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Um noch einige Beyspiele von den Constructionen der unbestimmten Gleichungen zu geben, wollen wir zeigen, wie man bey den, welche wir durch (A) bezeichnet, zu verfahren habe. Man setze darin

$$x = x' + \frac{\alpha}{2},$$

und

$$y = y' + \frac{\alpha}{2t},$$

um den Anfangspunct der Coordinaten in den Mittelpunct der Curve überzutragen, und nachdem man die nöthigen Rechnungen ausgeführt, gelangt man zu

$$x'^2 + y'^2 - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{4t^2} = 0.$$

Dieses ist die Gleichung des Zirkels auf den Mittelpunct zurückgebracht, wo dessen Halbmesser

$$\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{4t^2}\right)}$$

ist. Das Mittel, diese Wurzelgröße zu construiren, ist leicht; denn man errichte aus der Mitte der Geraden AP' die senkrechte $Pm = \frac{a}{2t}$, so wird der äußerste Punct m dieser senkrechten der Mittelpunct des gesuchten Kreises, und die Linie AM wird dessen Halbmesser seyn; welches offenbar ist.

Aus dieser Construction folgt, daß der Winkel AmP = dem Winkel AMP; denn die Gleichung der Geraden Am ist

$$y = \left(\frac{Pm}{AP}\right) x = \frac{1}{t} x.$$

da nun die Tangente des Winkels $mAP = \frac{1}{t}$, so wird dessen Cotangente, oder die Tangente des Winkels AmP = t seyn. Hieraus schließen wir, daß der Winkel am Mittelpuncte doppelt so groß ist, als der mit ihm auf einerley Bogen stehende Winkel am Umkreise, welches auch mit den geometrischen Betrachtungen übereinstimmt.

## Aufgabe.

### §. 53.

**Wenn zwey Kreise der Größe und Lage nach in einer Ebne gegeben sind, den Lauf der Mittelpuncte aller Kreise zu finden, welche die beyden gegebenen Kreise zugleich berühren.**

Wir wollen annehmen, daß Fig. 39. der gesuchte Kreis die beyden gegebenen Kreise umschließt, und die Coordinaten des Mittelpunctes des ersten Kreises durch x,

y, seinen Halbmesser durch z, den Abstand AA′ beyder andern Kreise von einander, wollen wir durch a, und die Halbmesser dieser Kreise durch r und r′ bezeichnen.

## Auflösung.

Aus den Eigenschaften der rechtwinklichten Dreyecke APM, A′PM folgt, daß man einerseits hat

$$x^2 + y^2 = (z - r)^2$$

und andrerseits

$$y^2 + (a - x)^2 = (z - r')^2.$$

Entwickelt man diese Gleichungen, so werden sie

$$z^2 - 2rz + r^2 = x^2 + y^2$$
$$z^2 - 2r'z + r'^2 = a^2 - 2ax + y^2 + x^2.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Formeln vom zweyten Grade

$$z^2 + Pz + Q = 0$$
$$z^2 + P'z + Q' = 0,$$

welche bekanntlich zum Endresultat

$$(P - P')(PQ' - QP') + (Q - Q')^2 = 0 \quad (A)$$

geben, so wird man haben

$$P = -2r, \quad P' = -(2r'), \quad Q = -(x^2 + y^2 - r^2),$$
$$Q' = -(x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - r'^2),$$

und wenn man diese Werthe in die Gleichung (A) einführt, so kann man ihr diese Form geben

$$\left.\begin{array}{l}(8rr' - 4r'^2 - 4r^2 + 4a^2)x^2 + (8rr' \\ - 4r'^2 - 4r^2)y^2 + (4ar'^2 + 4ar^2 - 8arr' \\ - 4a^3)x + a^4 + 4a^2rr' - 2a^2r^2 - 4rr'^3 \\ + 6r^2r'^2 - 4r^3r' + r^4 + r'^4 - 2a^2r'^2\end{array}\right\} = 0.$$

oder, wenn man alle Zeichen ändert und die Glieder in ihre Factoren zerfällt,

$$4(r-r')^2z^2+4[(r-r')^2-a^2]x^2-4a[(r-r')^2 - a^2]x=[(r-r')^2-a^2]^2.$$

Diese Gleichung ist die der Hyperbel, weil die Coefficienten von $x^2$ und von $y^2$ entgegengesetzte Zeichen haben. In der That hat man, weil $r-r'<a$, $4(r-r')^2<4a^2$.

Wenn aber $r-r'=a$, welches der Fall der Fig. 40. ist, so wird die Gleichung der hyperbolischen Curve, wenn man darin die angemessenen Reductionen macht, $y=0$.

Da dieses Resultat von $x$ unabhängig ist, so zeigt es, daß für alle Puncte der Axe der Abcissen, die Ordinate des gesuchten Mittelpunctes Null, desgleichen $r=r'$ ist, und daß die Gleichung der Hyperbel dann wird

$$x^2-ax=-\frac{a^2}{4},$$

woraus man zieht

$$x=\frac{a}{2}.$$

Dieses zeigt an, wie man leicht erwarten kann, daß für jede Ordinate $y$ die Abcisse immer beständig bleibt.

Wir können nicht unbemerkt lassen, daß man die Natur der gesuchten Curve weit leichter entdecken kann; denn da man einerseits hat $AM=z-r$, und von der andern Seite $A'M=z-r'$, so folgt daß

$$AM-A'M=(z-r)-(z-r')=r'-r.$$

Da dieses Resultat vom Halbmesser des gesuchten Kreises befreyet ist, so kann man daraus schließen, daß

die Differenz der Vektoren AM, A'M immer beständig ist, es sey daß der gesuchte Kreis die beyden gegebenen Kreise umschließe, oder daß er sie außerhalb lasse. Die Curve der Mittelpuncte in der Aufgabe ist also eine Hyperbel, welche zu Brennpuncten die Mittelpuncte der gegebenen Kreise selbst, und zur großen Axe die Differenz der Halbmesser hat.

Man kann auch überdieß die Scheitel der vorgelegten Hyperbel finden, ohne erst zur Uebertragung der Axen seine Zuflucht nehmen zu müssen. Denn in dem Puncte, wo die Hyperbel die Axe der Abcissen schneidet, ist die Ordinate Null; setzt man also in der Gleichung (A) $y = o$, und dividirt alles durch den Coefficienten von $x^2$, so wird man haben

$$x^2 - ax = \frac{[(r-r')^2 - a^2]^2}{4[(r-r')^2 - a^2]} = \frac{(r-r')^2 - a^2}{4}.$$

Wenn diese Gleichung nach x aufgelöst wird, so wird man erhalten,

$$x = \frac{a}{2} \pm \left(\frac{r-r'}{2}\right).$$

Da der erste Werth von x mit der Abcisse AS' Fig. 39. und der zweyte Werth mit der Abcisse AS übereinstimmt, so wird die große Axe SS' der Hyperbel gleich seyn $r - r'$, und der Mittelpunct O wird auf der Mitte des Abstandes AA' liegen. Ferner wird der hyperbolisch Ast $\pi$SQ derjenige seyn, auf welchem die Mittelpuncte der umschließenden Kreise liegen, so wie der Ast $\pi'$S'Q' die Mittelpuncte aller derjenigen Kreise enthalten wird, welche die gegebenen Kreise außerhalb lassen.

## Aufgabe.

### §. 54.

**Die Natur der Curve zu finden, welche alle Puncte enthält, von denen zwey einer gegebenen Parabel geführte Tangenten beständig einen gegebenen Winkel einschließen.**

Es sey $y^2 = px$ die Gleichung der gegebenen Parabel, nnd wir wollen die Coordinaten der Berührungspuncte

$$M, \qquad M \qquad \text{Fig. 41.}$$

durch

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\end{matrix}\right\}$$

bezeichnen.

Es sey ferner t die Tangente des gegebenen Winkels.

## Auflösung.

Die allgemeine Gleichung der durch einen auf der Axe AX′ genommenen Punct T gehenden Geraden TM ist

$$y = A\,(x + \alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Aus eben dem Grunde ist die der Geraden T′M′.

$$y = -A'\,(x + \alpha') \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2),$$

aber die Coordinaten des Durchschnittspunctes m dieser Geraden müssen in den Gleichungen (1) und (2) dieselben seyn; und da dieser Punct m auf der Seite der negativen Abcissen liegt, so muß man diesen Umstand berücksichtigen und x in — x verwandeln; die obigen Gleichungen werden alsdann

$$y = A\,(\alpha - x)$$
$$y = -A'\,(\alpha' - x);$$

da ferner $A = \frac{\beta}{2\alpha}$, und $A' = \frac{\beta'}{2\alpha'}$, so nehmen die vorhergehenden Gleichungen diese Form an

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\beta}{2\alpha}\,(\beta - x) \\ y &= \frac{-\beta'}{2\alpha'}\,(\alpha' - x) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3).$$

Endlich zieht man aus den Gleichungen $\beta^2 = \alpha p$, $\beta'^2 = \alpha' p$, welche zu den Berührungspuncten gehören, diese Werthe

$$\alpha = \frac{\beta^2}{p}, \quad \alpha' = \frac{\beta'^2}{p} \ldots\ldots (4).$$

welche, in die Gleichungen (3) substituirt, geben

$$2\beta y = -px + \beta^2$$
$$2\beta' y = px - \beta'^2,$$

woraus man zieht

$$\beta = y \pm \sqrt{(px + y^2)}$$
$$\beta' = -y \pm \sqrt{(px + y^2)}.$$

Ferner ist der Winkel $MmM' = MTA + AT'M'$; man hat also (§. 14.)

$$t = \frac{A + A'}{1 - AA'} = \frac{2\alpha\beta' + 2\alpha'\beta}{4\alpha\alpha' - \beta\beta'}.$$

Substituirt man in dieses Resultat statt $\alpha$ und $\alpha'$ ihre durch die Gleichungen (4) gegebene Werthe, so kommt, wenn man den Nenner hinweg schafft,

$$4\beta\beta' t - p^2 t = 2\beta p + 2\beta' p,$$

setzt man überdieß in dieser statt $\beta$ und $\beta'$ ihre im Vor-

hergehenden erhaltene Werthe, so kommt, wenn man alles durch p dividirt

$$4tx - pt = 4\sqrt{(px + y^2)}.$$

Erhebt man beyde Theile zum Quadrat, um das Wurzelzeichen hinweg zu schaffen, so wird man endlich haben

$$y^2 + \left(\frac{pt^2}{2} + p\right)x - t^2x^2 - \frac{p^2t^2}{16} = 0 \text{ (A)},$$

eine Gleichung der Hyperbel, weil ihre Form sich offenbar auf die Formel $\alpha u^2 - \beta t^2 + \varepsilon t = \zeta$ bringen läßt, die diese Curve darstellt (§. 16.).

Um nun den Anfangspunct in den Mittelpunct der Hyperbel überzutragen, und folglich der vorhergehenden Gleichung die Form $y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(x'^2 - a^2)$ zu geben, schaffe man das Glied weg, in welchem sich x auf der ersten Potenz findet, indem man in der Gleichung der Curve $x' + q$ statt x setzt; es ist aber aus der Theorie der Gleichungen bekannt, daß man in dergleichen Fällen haben wird

$$x = x' + \frac{p}{4} + \frac{p}{2t^2}.$$

Die Formel (A) wird also durch die Substitution dieses Werths werden

$$y^2 = t^2\left[x'^2 - \frac{p^2}{4t^2}(t^2 + 1)\right] \text{ (B)}.$$

Um die erste Halbaxe zu finden, setze man in diesem Resultate $y = 0$, und man wird erhalten

$$x' = a = \pm \frac{p}{2t^2}\sqrt{(t^2 + 1)},$$

und um die zweyte Halbaxe zu finden, setze man $x' = o$, welches geben wird

$$y = b = \frac{p}{2t} \sqrt{(t^2 + 1)}.$$

Erinnert man sich nun, daß man nach den Rechnungen der Kreisfunctionen Fig. 31. hat

$$\sin a = \frac{\tang a}{\sqrt{(1 + \tang a^2)}},$$

so kann man den Ausdruck der Axen folgendermaßen vereinfachen. Bezeichnet man z. B. den Sinus des Winkels MmM′ durch $\int$, wenn es seine Tangente durch t ist, so kann man daraus vermittelst der vorhergehenden Formel herleiten, daß

$$\frac{1}{\int} = \frac{\sqrt{(1 + t^2)}}{t},$$

und folglich

$$a = \frac{p}{2t\int}, \quad b = \frac{p}{2\int};$$

die Gleichung (B) wird also

$$y^2 = t^2 \left(x'^2 - \frac{p^2}{4t^2\int^2}\right) \text{(B')}.$$

Hieraus folgt, daß wenn man die x um die Größe $\frac{1}{4}p + \frac{p}{2t^2}$ vermindert, und eine Hyperbel beschreibt, deren Axen 2a und 2b sind, diese Curve der Lauf der Gleichung (A) seyn wird.

In der vorhergehenden Auflösung hat man angenommen, daß der gegebene Winkel MmM′ spitz sey, und es ist offenbar, daß wenn er stumpf wäre, seine negative Tangente, wenn in den Gliedern der Gleichung (A)

nur immer in der zweyten Potenz vorkommt, darin keine Veränderungen hervorbringen würde. Hieraus schließen wir, daß der eine der hyperbolischen Aeste QR dem Fall ein Genüge leistet, wo der vorgelegte Winkel ein spitzer, und der andre Q'R dem Fall, wo dieser Winkel stumpf ist.

Wenn es sich endlich zutragen sollte, daß der gegebene Winkel MmM' ein rechter wären, so würde die gesuchte Linie die Leitlinie der Parabel selbst seyn, weil alsdann die Gleichung (B'), was auch y' seyn mag, geben würde $y = 0$; und weil $x = x' + \frac{1}{4}p + \frac{1}{2}\frac{p}{t^2}$, so würde man unter eben diesen Umstande haben $x = \frac{1}{4}p$; welches den Abstand des Scheitels der Curve von der Leitlinie ausdrückt.

## Aufgabe.

### §. 55.

**Einen Punct M' von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn man von demselben auf die Schenkel eines gegebenen Winkels MAB senkrechte Linien fällt, das hieraus erfolgende Viereck einem gegebenen Quadrat $q^2$ gleich sey.**

Es seyen Fig. 31. a die Tangente des gegebenen Winkels MAB, und x', y' die Coordinaten des gesuchten Punctes.

## Auflösung.

Die Gleichung der durch den Anfangspunct A gehenden Geraden AM ist

$$y = ax,$$

und die der darauf senkrechten MM′ ist

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x').$$

Die Coordinaten des Durchschnittspunctes M dieser Geraden werden also seyn

$$x = \frac{x' + ay'}{1 + a^2}, \quad y = \frac{a^2y' + ax'}{1 + a^2}.$$

Der Flächeninhalt des Dreyecks AMM′ in einer Function der Coordinaten seiner Winkel ausgedrückt ist (§. 81. L. C.)

$$\frac{x'(a^2y' + ax') - y'(x' + ay')}{2(1 + a^2)},$$

und der Flächeninnhalt des Dreyecks AP′M′ $= \frac{x'y'}{2}$. Da nun das Viereck AMM′P′ = AMM′ + AM′P′ $= q^2$, so folgt, daß

$$a^2x'y' + ax'^2 - x'y' - ay'^2 + x'y' + a^2y'x' = 2q^2(1 + a^2),$$

oder, wenn man die Zeichen ändert, reducirt, und alles durch a dividirt,

$$y'^2 - 2ax'y' - x'^2 = -2q^2\left(\frac{1 + a^2}{a}\right) \text{(A).}$$

Dieses ist die Gleichung, welche man construiren müßte, um den Lauf aller Puncte M′ zu erhalten, welche der Bedingung der vorgelegten Aufgabe ein Genüge thun. Löst man diese Gleichung nach y′ auf, so wird man haben

$$y' = ax' \pm \sqrt{\left[(1 + a^2)\left(x'^2 - \frac{2q^2}{a}\right)\right]},$$

woraus man sieht, daß die Curve, auf welche sie führt,

eine Hyperbel ist, welche ihren Mittelpunct im Puncte A hat; und daß wegen der rationalen Größe ax, die Gerade AM für einen ihrer Durchmesser genommen werden muß. Man trage daher der Axe AY parallel, sowohl oberhalb als unterhalb der AM und der Am Theile, welche der Größe

$$\sqrt{\left[(1 + a^2)\left(x'^2 - \frac{2q^2}{a}\right)\right]}$$

gleich; alle auf diese Art erhaltene Puncte zusammen genommen werden die Aeste der zu beschreibenden Curve bestimmen. Wir wollen uns nicht mehr über das Detail dieser Construction auslassen, weil es keine Schwierigkeit darbiethet; wir bemerken bloß, daß, wenn man in der Gleichung (A) das durch $x'y'$ multiplicirte Glied hinwegschaffen wollte, man dann die Richtung der Coordinaten verändern müßte, indem man darin setzt (§. 114. L. C.)

$$x' = mu - nt, \qquad y' = nu + mt;$$

und in diesem Falle würde die erfolgende Gleichung die der auf ihre Axen zurückgeführten Hyperbel seyn.

Wenn a unendlich ist, oder, welches dasselbe ist, wenn der gegebene Winkel ein rechter ist, so reducirt sich die Gleichung (A) auf $x'y' = q^2$, weil alle Glieder ohne a gegen die mit a behafteten als Null anzusehen sind. Wollte man aber die Betrachtung des unendlichen vermeiden, so müßte man $a = \frac{\sin A}{\cos A}$ setzen, und die Gleichung (A) wird durch die Substitution dieses Werths, und nachdem man den Nenner cos A hinweg geschaft hat,

$$\cos A y'^2 - 2 \sin A x'y' - \cos A x'^2$$
$$= -2q^2 \left(\frac{\cos A^2}{\sin A} + \sin A\right).$$

Da der Winkel MAB ein rechter ist, so hat man $\cos A = 0$, und $\sin A = 1$; die vorhergehende Gleichung reducirt sich also auf

$$x'y' = q^2.$$

Dieses ist die der gleichseitigen Hyperbel zwischen ihren Asymptoten AX, AY Fig. 41.

Wenn endlich der Winkel größer als ein Quadrant ist, so wird seine Tangente a negativ, und die Gleichung (A), welche noch zur Hyperbel gehört, verwandelt sich in

$$y'^2 + 2ax'y' - x'^2 = 2q^2 \left(\frac{1 + a^2}{a}\right).$$

## Aufgabe.

### §. 56.

Zwey Kreise AB, A'B' Fig. 42 sind der Größe und Lage nach in einer Ebne gegeben; durch irgend einen Punct C' des Kreises A'B' habe man eine unbegränzte Tangente geführt, welche den andern Kreis in zweyen Puncten m, m' schneidet, aus welchen jenem die Tangenten mM, m'M geführt sind; man verlangt nun die Natur der Linie, auf welcher alle Durchschnittspuncte M liegen.

Es seyen $\alpha$ und $\beta$ die Coordinaten des gesuchten Punctes M,

der Halbmesser AB $= r$   $x, Y$ } die Coordinaten } m<br>
der Halbmesser A'B' $= r'$   $X, y$ } der Puncte } m',

und

und den Abstand AA' beyder Mittelpuncte wollen wir durch a bezeichnen.

## Auflösung.

Da die Tangente Mm durch einen Punct gehen muß, dessen veränderliche Ordinaten $\alpha$, $\beta$ sind, so wird ihre Gleichung seyn (§. 21.)

$$\beta y + \alpha x = r^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

und da die Gleichung des Kreises AB ist

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2),$$

so wird die Combination dieser Gleichungen geben

$$x = \frac{\alpha r^2 \pm \beta r \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - r^2)}}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$y = \frac{\beta r^2 \mp \alpha r \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - r^2)}}{\alpha^2 + \beta^2} \; *).$$

Es ist zu merken, daß die Werthe von x und von y, nach den obern Zeichen genommen, respectiv die Größen von X und von Y bezeichnen; und daß dieselben Werthe, nach den untern Zeichen genommen, mit den Größen von x und von y übereinstimmen; setzt man nun zur Abkürzung $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - r^2)} = M$, und $\alpha^2 + \beta^2 = N$, so hat man bloß

$$X = \frac{\alpha r^2 + \beta r M}{N}, \qquad x = \frac{\alpha r^2 - \beta r M}{N},$$

$$Y = \frac{\beta r^2 + \alpha r M}{N}, \qquad y = \frac{\beta r^2 - \alpha r M}{N}.$$

---

*) Da die Größen x, y in den Gleichungen (1) und (2) auf einerley Art vorkommen, so folgt, daß man zum Beyspiel den Werth von y erhält, wenn man in dem von x, $\alpha$ in $\beta$ verwandelt, und umgekehrt.

Da die Coordinaten der Puncte m, m' bekannt sind, so suche man die Abcisse AT des Punctes, in welchem die Gerade m m' die Axe AX trift, und es ist offenbar, daß man, wenn der Abstand p'T durch z bezeichnet wird, diese Gleichheit hat,

$$\frac{Y - y}{X - x} = \frac{y}{z},$$

woraus man zieht, nachdem man die vorhergehenden analytischen Werthe angewendet und reducirt hat

$$z = \frac{\beta y}{\alpha},$$

folglich $AT = X + z = X + \frac{\beta y}{\alpha}$.

Substituirt man nun in der Formel des §. 32. statt a dessen gegenwärtigen Werth $\frac{y}{z} = \frac{\alpha}{\beta}$, und statt $\alpha$ die Größe $a + X + z$, so erhält man, wenn man den Buchstaben r accentuirt

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r'}{\sqrt{[(a + X + z)^2 - r'^2]}}.$$

Wenn nun dieser Ausdruck, welcher der der trigonometrischen Tangente des von der Axe AX und der Tangente CT' des Kreises A'B' gebildeten Winkels ist, von seinem Wurzelzeichen befreyet wird, so kann er, wenn man statt X und z die dafür oben gefundenen Werthe setzt, folgendermaaßen geschrieben werden

$$\left[a + \frac{\alpha r^2 + \beta r M}{N} + \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta r^2 - \alpha r M}{N}\right)\right]^2 - r'^2 = \frac{r'^2 \beta^2}{\alpha^2},$$

oder

$$\left(a+\frac{(\alpha^2+\beta^2)r^2}{\alpha N}\right)^2 - r'^2 = \frac{r'^2\beta^2}{\alpha^2},$$

oder, weil $\alpha^2+\beta^2 = N$

$$\left(a+\frac{r^2}{\alpha}\right)^2 - r'^2 = \frac{r'^2\beta^2}{\alpha^2}.$$

Entwickelt man den ersten Theil dieser Gleichung und schafft die Nenner hinweg, so kommt,

$$a^2\alpha^2 + 2ar^2\alpha - r'^2\alpha^2 + r^4 = r'^2\beta^2,$$

oder endlich

$$\beta^2 + \left(\frac{r'^2 - a^2}{r'^2}\right)\alpha^2 - \frac{2ar^2}{r'^2}\alpha - \frac{r^4}{r'^2} = 0.$$

Dieses ist die Gleichung der Curve des Durchschnitts der Tangenten mM, m'M, deren Lauf eine Parabel, eine Ellipse oder eine Hyperbel ist, je nachdem r' gleich, oder größer oder kleiner als a ist.

## Aufgabe.

### §. 57.

**In ein Dreyeck Fig. 43. eine Ellipse dergestalt einzuschreiben, daß ein Durchmesser durch die vom Scheitel nach der Mitte der Basis gezogene Linie gehe.**

Da der große Durchmesser AB auf der Linie AT genommen ist, welche durch die Mitte der Basis und durch den Punct T geht, so wird der kleinere Durchmesser CD nothwendigerweise der Tangente GH parallel seyn; und die Berührungspuncte M, M' werden auf den äußersten Puncten der doppelten Ordinate MM' liegen, weil zu einer und derselben Abcisse zwey gleiche

Ordinaten gehören, und weil die ihnen zugehörigen Tangenten, sich in einem und demselben Puncte schneiden.

Dieses vorausgesetzt, wollen wir setzen $GH = 2m$, $AG = m$, $AT = n$, den Durchmesser $AB = a'$, seinen zugeordneten $CD = b'$, und durch $\alpha$, $\beta$ wollen wir die Coordinaten des Punctes M bezeichnen.

## Auflösung.

Die Gleichung der Ellipse in Beziehung auf ihre Durchmesser, ist

$$a'^2 t^2 + b'^2 u^2 = a'^2 b'^2,$$

wo u als die auf AB genommene Abcisse, und t als die correspondirende Ordinate betrachtet wird. Diese Gleichung wird für den Punct M

$$a'^2 \beta^2 + b'^2 \alpha^2 = a'^2 b'^2 \quad \ldots\ldots (1).$$

Da ferner die Puncte T, M, H auf einer und derselben Geraden liegen, so müssen die Verhältnisse $\frac{PM}{PT}$ und $\frac{AH}{AT}$ nothwendigerweise gleich seyn; wendet man also die algebraische Bezeichnung an, so hat man

$$\frac{m}{n} = \frac{\beta}{n - a' - \alpha}$$

woraus man zieht

$$\beta = \frac{(n - a' - \alpha)\, m}{n} \quad \ldots\ldots (2).$$

Um endlich auszudrücken, daß die Linien GT, TH mit der Ellipse in Berührung sind, wird man haben

Subtangente $PT = \frac{a'^2 - \alpha^2}{\alpha} = n - a' - \alpha \ldots\ldots (3).$

Da diese drey Gleichungen eine unbekannte Größe mehr enthalten, so bleibt die Aufgabe unbestimmt, das heißt, es existirt eine unendliche Anzahl Ellipsen, welche mit der vorgetragenen Eigenschaft behaftet sind. Allein diese Aufgabe würde auf eine einzige eingeschränkt werden, wenn man die Bedingung hinzu fügte, daß die zu beschreibende Ellipse die Mitte der Seite HT berühren muß; denn alsdann hat man

$$\alpha = \frac{n}{2} - a',$$

und da die Gleichung (2) vermittelst dieses Werths $\beta = \frac{m}{2}$ wird; so folgt, daß sich die Gleichungen (1) und (3) respectiv in diese verwandeln

$$\frac{a'^2 m^2}{4} + b'^2 \left(\frac{n}{2} - a'\right)^2 = a'^2 b'^2$$

und

$$\frac{n}{2} = \frac{a'^2 - \left(\frac{n}{2} - a'\right)^2}{\frac{n}{2} - a'},$$

oder um zu vereinfachen in

$$a'^2 m^2 + b'^2 (n - 2a')^2 = 4a'^2 b'^2 \ldots\ldots (1')$$

und

$$n = 3a' \ldots\ldots (3').$$

Da diese letztere $a' = \frac{n}{3}$ giebt, so wird der vorhergehende geben $m^2 + b'^2 = 4b'^2$, und folglich

$$b' = \sqrt{\frac{m^2}{3}} = OD.$$

Der zweyte halbe Durchmesser ist also die mittlere Proportionale zwischen $\frac{m}{3}$ und m, oder weil $OK = \frac{2m}{3}$ und $PM = \frac{m}{2}$, so ist eben dieser halbe Durchmesser die mittlere Proportionale zwischen OK und PM.

Andrerseits wird, weil $a' = \frac{n}{3}$, der Mittelpunct O der Ellipse nothwendigerweise auf der Linie HM liegen, welche sich auf der Mitte von GT endigt; dieses ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Lehrsatze (§. 27.).

Es ist klar, daß wenn das gegebene Dreyeck GTH gleichschenklicht wäre, die Linien AB, CD für die Axen der Ellipse genommen werden müßten. Man sieht überdieß, daß wenn dieses Dreyeck gleichseitig ist, man haben würde $n = \sqrt{3m^2}$, und $AO = \frac{n}{3} = \sqrt{\frac{m^2}{3}}$, so wie man dann hat $OD = \sqrt{\frac{m^2}{3}}$. In diesem Falle wird also die Ellipse in einen Kreis übergehen, wie man leicht erwarten konnte.

Wir wollen im Vorbeygehen anmerken, daß die nach den eben vorgetragenen Bedingungen beschriebene Ellipse die möglichst größte von allen denen ist, welche im Dreyecke GHT eingeschrieben werden können.

## Aufgabe.

### §. 58.

Eine Curve der zweyten Ordnung zu beschreiben, welche durch einen gegebenen Punct M′ geht, und welche die Schenkel des Winkels MTm Fig. 44. in den beyden gegebenen Puncten M, m berühre.

Wir wollen annehmen, daß die Curve eine Ellipse sey. Man verbinde mM, und aus der Mitte P dieser Linie ziehe man PT, welche die Subtangente in Rücksicht der halben conjugirten Durchmesser AB′, AC′ seyn wird, welche mit einander den durch TPM dargestellten Winkel bilden; man bezeichne durch

$$\left.\begin{matrix}\alpha, \beta \\ \alpha', \beta'\end{matrix}\right\}\text{die Coordinaten der Puncte}\left\{\begin{matrix}M \\ M'\end{matrix}\right.$$

welche, als vom Mittelpuncte A ausgenommen, gerechnet werden.

Es seyen ferner

$$A'B' = a', \quad AC' = b', \quad PT = m, \quad PP' = n,$$

### Auflösung.

Die Gleichung der Ellipse in Rücksicht auf ihre Durchmesser ist

$$a'^2 t^2 + b'^2 u^2 = a'^2 b'^2.$$

Für die gegebenen Puncte M, M′ nimmt sie diese Form

$$a'^2 \beta^2 + b'^2 (\alpha' + n)^2 = a'^2 b'^2 \; \ldots\ldots (1)$$

und

$$a' \beta'^2 + b'^2 \alpha'^2 \qquad = a'^2 b'^2 \; \ldots\ldots (2)$$

Der Ausdruck der Subtangente PT oder m ist für die Abcisse $\alpha' + n$ oder AP

$$m = \frac{a'^2 - (\alpha' + n)^2}{(\alpha' + n)} \ldots\ldots (3)$$

und aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man

$$b'^2 = \frac{a'^2 \beta^2}{a'^2 - (\alpha' + n)^2}, \quad b'^2 = \frac{a'^2 \beta'^2}{a'^2 - \alpha'^2};$$

setzt man diese beyden Werthe einander gleich, so erhält man nach der nöthigen Vereinfachung

$$\beta^2 (a'^2 - \alpha'^2) = \beta'^2 [a'^2 - (\alpha' + n)^2];$$

und da die Gleichung (3) giebt

$$a'^2 = m (\alpha' + n) + (\alpha' + n)^2,$$

so erhält man, wenn dieser Werth in die vorhergehende Gleichung gesetzt wird,

$$\beta^2 m\alpha' + \beta^2 mn + 2\beta^2 \alpha' n + \beta^2 n^2 = \beta'^2 m\alpha' + \beta'^2 mn,$$

woraus man zieht

$$\alpha' = \frac{(\beta'^2 - \beta^2)\, mn - \beta^2 n^2}{2\beta^2 n - (\beta'^2 - \beta^2)\, m},$$

und folglich AP oder

$$\alpha' + n = \frac{\beta^2 n^2}{2n\beta^2 - (\beta'^2 - \beta^2)\, m} \; (A).$$

Da nun der Werth von $\alpha' + n$ bekannt ist, so wird der aus der Gleichung (3) hergeleitete Werth von $a'$ durch

$$\sqrt{[m(\alpha' + n) + (\alpha' + n)^2]}$$

ausgedrückt seyn, und die Gleichung (1) wird für den Ausdruck des zweyten halben Durchmessers $b'$ geben

$$\frac{a'\beta}{\sqrt{[a'^2 - (\alpha' + n)^2]}}.$$

Da die beyden halben conjugirten Durchmesser bekannt sind, so kann man die Größe der Halbaxen der Ellipse, und ihre Lage gegen die Durchmesser bestimmen. Ungeachtet die Rechnungen, welche diese Bestimmung erfordert, nichts weniger als schwer sind, so wollen wir sie doch zum Nutzen einiger Leser ausführen; aber vorher wollen wir aus den eben erhaltenen Resultaten einige Folgerungen ziehen.

Es könnte sich zuvörderst zutragen, daß die Puncte m, M von T gleiche Entfernung haben und daß zu gleicher Zeit $a' = b'$; wenn nun diese beyden Umstände zugleich eintreten, so wird der Winkel TPM ein rechter seyn, und die elliptische Curve verwandelt sich in den Umkreis eines Zirkels. Hieraus folgt, daß

$$a'^2 = b'^2 = \frac{a'^2 \beta^2}{a'^2 - (\alpha' + n)^2},$$

das heißt

$$a'^2 = (\alpha' + n)^2 + \beta^2.$$

Ueberdieß ist $a'^2 = [m(\alpha' + n) + (\alpha' + n)^2]$; aus diesen beyden Werthen schließt man also

$$\alpha' + n = \frac{\beta^2}{m}.$$

Vergleicht man überdieß diesen Werth mit den oben erhaltenen (A), so erfolgt daraus PT oder

$$m = \frac{2\beta^2 n}{n^2 + \beta'^2 - \beta^2}.$$

Dieses ist die Höhe, die das gleichschenklichte Dreyeck haben muß, damit die darin einzuschreibende Curve ein Kreis werde.

Wenn man in dem durch die Gleichung (A) gegebenen allgemeinen Ausdruck von $\alpha' + n = AP$, $2n\beta^2 = (\beta'^2 - \beta^2)\,m$, oder $m = \frac{2n\beta^2}{\beta'^2 - \beta^2}$ hätte, so würde dieser Ausdruck so wie die Werthe von $a'$ und $b'$ unendlich werden; die Ellipse würde dann in eine Parabel übergehen. Was den Scheitelpunct $B'$ dieser letztern betrift, so kann man ihn bestimmen, wenn man $TB' = \frac{m}{2}$ nimmt, weil in der Parabel die Subtangente $PT$ der doppelten Abcisse $PB'$ gleich ist, wenn der Anfangspunct der Coordinaten in den Punct $B'$ getragen wird. Ferner ist die Gleichung dieser Curve für den Punct $M$, und in Rücksicht auf den Durchmesser $AB'$, $\beta^2 = \frac{p'm}{2}$, wo $p'$ der Parameter ist. Für irgend einen Punct hat man also

$$y'^2 = \frac{2\beta^2}{m}\,x'.$$

Wenn endlich in der Gleichung (A)

$$2n\beta^2 < (\beta'^2 - \beta^2)\,m,$$

oder

$$m > \frac{2n\beta^2}{\beta'^2 - \beta^2},$$

so wird der Mittelpunct der gesuchten Curve auf der entgegengesetzten Seite von $AP$, das heißt im Puncte $A'$ liegen, und alsdann wird diese Curve eine Hyperbel seyn, deren Halbaxen man vermittelst der halben zugeordneten Durchmesser bestimmen kann. Hier ist nun über diesen Gegenstand die Ausführung der Rechnungen, auf welche die Ellipse führt.

§. 59.

**Wenn Fig. 45. die beyden zugeordneten Durchmesser einer Ellipse nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel gegeben sind, die beyden Halbaxen zu finden.**

Es ist (§. 136 und 137 L. C.) bewiesen worden, daß zwischen den beyden Halbaxen a, b und den beyden halben zugeordneten Durchmessern a′, b′ diese beyden Beziehungen anzutreffen sind:

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$$
$$ab = a'b's,$$

wenn $s$ den Sinus des von den beyden zugeordneten Durchmessern gebildeten Winkels ausdrückt.

Wenn man das doppelte der zweyten zur ersten hinzusetzt, und dann von derselben abzieht, so wird man haben

$$a^2 + b^2 + 2ab = a'^2 + b'^2 + 2a'b's$$
$$a^2 + b^2 - 2ab = a'^2 + b'^2 - 2a'b's;$$

zieht man die Quadratwurzel, so kommt

$$a + b = \sqrt{(a'^2 + b'^2 + 2a'b's)}$$
$$a - b = \sqrt{(a'^2 + b'^2 - 2a'b's)};$$

woraus man zieht

$$2a = \sqrt{(a'^2 + b'^2 + 2a'b's)} + \sqrt{(a'^2 + b'^2 - 2a'b's)}$$
$$2b = \sqrt{(a'^2 + b'^2 + 2a'b's)} - \sqrt{(a'^2 + b'^2 - 2a'b's)},$$

Diese Wurzelgrößen lassen sich bequem vermittelst des schiefwinklichten Dreyecks construiren; denn die erste Wurzelgröße bezieht sich auf ein Dreyeck, dessen senk-

rechte außerhalb fällt, und die zweyte Wurzelgröße auf ein Dreyeck, dessen senkrechte innerhalb fällt.

Es sey daher vom äußersten Punct C′ des Durchmessers auf seinen zugeordneten die senkrechte C′P gefällt, und diese C′P um die Größe C′D = AB verlängert; so wird man für den Ausdruck der ersten Wurzelgröße haben

$$AD = \sqrt{(AC'^2 + C'D^2 + 2C'D \times PC')}$$
$$= \sqrt{(b'^2 + a'^2 + 2a'b'f)}.$$

Es sey ferner C′PD′ = AB′; so wird man für den Ausdruck der zweyten Wurzelgröße haben

$$AD' = \sqrt{(AC'^2 + C'D'^2 - 2C'D' \times PC')}$$
$$= \sqrt{(b'^2 + a'^2 - 2a'b'f)}.$$

Der Rest der Operation hat nun keine Schwierigkeit mehr.

§. 60.

Was den Winkel C′AB betrifft, so kann man ihn folgendermaaßen bestimmen; man ziehe aus den im (§. 136. L. C.) erhaltenen Gleichungen

$$a'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2n^2 + b^2m^2}, \qquad m^2 + n^2 = 1,$$

den Werth von n, indem man in der ersten Gleichung für $m^2$, dessen Werth $1 - n^2$ setzt, man wird also haben

$$\sin C'AB = n = \frac{b}{a'} \sqrt{\left(\frac{a^2 - a'^2}{a^2 - b^2}\right)}.$$

Eben so würde daraus für den Winkel BAB′ erfolgen

$$\sin BAB' = q = \frac{b}{b'} \sqrt{\left(\frac{a^2 - b'^2}{a^2 - b^2}\right)}.$$

Man würde auf eine analoge Art, bey der Hyperbel verfahren; allein in diesem Falle sind die Werthe von a und b viel verwickelter als die, welche der Ellipse zukommen, und sie sind auch nicht einer so einfachen Construction fähig.

## Aufgabe.

### §. 61.

Die Gleichung der Curve DM'Q Fig. 46. zu finden, deren Eigenschaft diese ist, daß wenn man von einem der Lage nach gegen eine Linie CB gegebenen festen Punct A nach allen ihren Puncten gerade Linien AD, A'M zieht, jeder der Theile CD, MM' dieser Linien von einer gegebenen Größe d sey.

Man nehme zu den Coordinaten des Systems die Geraden AX, AY, von denen die erste der gegebenen CB parallel, und die andre darauf senkrecht ist; und es seyen

$$AC = b, \qquad CD = d$$
$$AP' = x', \qquad P'M' = y'.$$

## Auflösung.

Die Gleichung der Geraden AM ist $y = Ax$, oder $y = \frac{y'}{x'} x$. Die der Geraden CB, welche beständig der AX parallel läuft, ist $y = b$.

Diese beyden Gleichungen gegen einander gehalten, geben für die Abcisse des Punctes M

$$x = \frac{bx'}{y'}.$$

Andrerseits ist der Abstand $AM' = \sqrt{(x'^2 + y'^2)}$, und der Abstand

$$AM = \frac{b}{y'} \sqrt{(x'^2 + y'^2)}.$$

Da nun $AM = AM' - MM'$, so wird man haben

$$AM = \sqrt{(x'^2 + y'^2)} - d;$$

setzt man diesen Werth von AM dem vorhergehenden gleich, so wird daraus erfolgen

$$\frac{b}{y'} \sqrt{(x'^2 + y'^2)} = \sqrt{(x'^2 + y'^2)} - d,$$

und schaft man das Wurzelzeichen hinweg, so erhält man zur verlangten Gleichung

$$y'^4 - 2by'^3 + b^2y'^2 - d^2y'^2 + x'^2y'^2 - 2by'x'^2 + b^2x'^2 = 0.$$

Die Curve, auf welche diese Gleichung führt, wird die Conchoide, Muschellinie, genannt. Nicomedes, der der Erfinder derselben ist, hat sich ihrer zur Auflösung der Aufgabe von zweyen mittleren Proportionallinien bedient. Die Gerade CB ist offenbar die Asymptote dieser Curve.

## Aufgabe.

### §. 62.

Die Gleichung der Curve AMC Fig. 47. zu finden, die so beschaffen ist, daß wenn man, nachdem auf einer gegebenen Geraden AB als Durchmesser ein Halbkreis AM'B beschrieben, und durch den Punct

B die senkrechte BN errichtet worden, durch den Punct A und durch irgend einen Punct dieser Curve, die Gerade AMN zieht, welche den Halbkreis in M′, und die Gerade BN in N trifft, immer AM = M′N sey.

Es sey die gegebene Linie AB = 2r, und x′, y′ die Coordinaten des Punctes M der vorgelegten Curve.

## Auflösung.

Da AM der M′N gleich seyn muß, wie auch übrigens der Winkel NAB beschaffen seyn mag, so wird man unter demselben Umstande haben AP = P′B; also

$$AP' = 2r - x.$$

Da die Gleichung des Kreises, wenn der Anfangspunct im Puncte A des Umkreises liegt, $y^2 = 2rx - x^2$ ist, so wird man für den Punct M′ haben

$$y^2 = 2r(2r - x') - (2r - x')^2,$$

und die Gleichung der Geraden AN wird für denselben Punct werden

$$y = \frac{y'}{x'}(2r - x').$$

Quadrirt man diese, und setzt man ihren zweyten Theil dem der vorhergehenden Gleichung gleich, so erhält man nach gemachter Reduction

$$y'^2(2r - x') - x'^3 = 0.$$

Dieses ist die Cissoide des Diocles. Die Alten mach-

ten von dieser Curve Gebrauch, um die Aufgabe von der Verdopplung des Cubus aufzulösen.

Wir wollen uns nicht weiter mit den Curven höherer Ordnungen beschäftigen, weil unser Zweck bloß der ist, zu zeigen, daß die analytische Methode, welche den Gegenstand unsrer Betrachtungen ausmacht, sich bey allen Aufgaben der Geometrie anbringen läßt, wie sie auch immer beschaffen seyn mögen.

## Aufgabe.

### §. 63.

**Vier Liniale AM′, Am′, M′M″, m′M″ Fig. 48. sind in der Form eines Parallelogramms dergestalt mit einander verbunden, daß sie sich um ihre Winkel, wie um Gewinde bewegen können; die Liniale m′M″, M′M″ seyen um die Theile mm′, MM′ verlängert, welche respectiv den Linialen Am′, AM′ gleich sind; man verlangt die Natur der Curven, welche beschrieben werden, wenn, indem sich das ganze System um den Punct A als einen Zapfen bewegt, der Punct M eine bekannte Curve durchläuft.**

Es sey der feste Punct A für den Anfangspunct der rechtwinklichten Coordinaten AX, AY genommen, und wir wollen durch

$$\left.\begin{matrix} X,\ Y \\ X',\ Y' \\ X'',Y'' \end{matrix}\right\}\ \text{die Coordinaten der Puncte}\ \left\{\begin{matrix} M \\ M' \\ M'' \end{matrix}\right. \qquad \left.\begin{matrix} x,\ y \\ x',\ y' \end{matrix}\right\}\ \text{die der Puncte}\ \left\{\begin{matrix} m \\ m' \end{matrix}\right.$$

bezeichnen. Wir wollen ferner AM′ = a, Am′ = a′ setzen.

Auflö-

## Auflösung.

Aus der Construction folgt zuvörderst, daß die drey Puncte m, A, M in gerader Linie sind; denn wegen der Parallelen mM'', AM' und Am', MM' sind die Winkel mm'A, m'AM', AM'M einander gleich, woraus man schließen kann, daß die gleichschenklichten Dreyecke mm'A, AM'M nothwendigerweise gleichwinklicht sind. Wie also auch das Instrument liegen mag, so hat man immer zwischen den drey Winkeln um den Punct A die Beziehung

$$mAm' + m'AM' + M'AM = 2q,$$

wo q den Quadranten oder den vierten Theil des Umkreises bezeichnet.

Wenn man nun A'M der AP parallel führt, und die Ordinaten P'M', P''M'' bis in N', N'' verlängert, so wird (§. 2.) der Sinus des Winkels M'MN' durch das Verhältniß $\frac{M'N'}{M'M} = \frac{P''M'' - P'M'}{M''M'}$ ausgedrückt seyn; woraus man zieht, wenn man die algebraischen Werthe anbringt

$$a(Y'' - Y') = a'(Y' + Y) \; \ldots\ldots (1)$$

desgleichen wird der Cosinus des Winkels M'MN' zum Ausdruck haben

$$\frac{MN'}{M'M} = \frac{A'N' - A'N''}{M'M''}; \text{ also}$$

$$a(X' - X'') = a'(X - X') \; \ldots\ldots (2).$$

Andrerseits giebt das rechtwinklichte Dreyeck M'N'M diese Gleichung

$$(Y' + Y)^2 + (X - X')^2 = a^2,$$

welche, nachdem sie entwickelt und vermittelst der im Dreyecke $AP'M'$ anzutreffenden Beziehung $X'^2 + Y'^2 = a^2$ vereinfacht werden, sich auf

$$X^2 + Y^2 - 2XX' + 2YY' = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

reducirt.

Dieses vorausgesetzt, erhält man, wenn die Gleichungen (1) und (2) nach $X'$ und $Y'$ aufgelöst werden,

$$Y' = \frac{aY'' - a'Y}{a + a'}, \quad X' = \frac{aX'' + a'X}{a + a'}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (3), so wird sie

$$(a - a')(X^2 + Y^2) = 2a(X''X - Y''Y) \quad (A).$$

Da der Cosinus des Winkels $M'MN'$ auch noch durch

$$\frac{MN''}{M''M} = \frac{MN'}{M'M}$$

ausgedrückt werden kann, so folgt, daß

$$(a + a')(X - X') = a(X - X'');$$

da ferner die Tangente dieses Winkels durch das Verhältniß $\frac{M'N''}{N''M} = \frac{M'N'}{N'M}$ ausgedrückt ist, so hat man

$$(Y + Y'')(X - X') = (Y + Y')(X - X'');$$

diese Gleichung mit der vorhergehenden verbunden, führt auf

$$X' = \frac{a'X + aX''}{a + a'}, \quad Y' = \frac{aY'' - a'Y}{a + a'};$$

woraus folgt, wegen $X'^2 + Y'^2 = a^2$,

$$(a'X + aX'')^2 + (aY'' - a'Y)^2 = a^2(a + a')^2 \quad (B).$$

Man erhält in Rücksicht der Puncte m, m′, M″ den Gleichungen (A), (B), welche in Beziehung auf die Puncte M, M′, M″ sind, völlig ähnliche; und man darf in jenen nur X in — x; Y in — y; a in a′, und umgekehrt verwandeln, welches giebt

$$(a'-a)(x^2+y^2) = -2a'(X''x - Y''y) \quad (A')$$

$$(a'X''-ax)^2 + (a'Y''+ay)^2 = a'^2(a+a')^2 \quad (B'),$$

diese Veränderung rührt daher, weil die Coordinaten x, y respectiv gegen die Coordinaten X, Y eine entgegengesetzte Lage haben, und daß sie aus dieser Ursache mit verschiedenen Zeichen behaftet seyn müssen. Uebrigens kann man zu diesen letzteren Resultaten direkt auf einem ähnlichen Wege gelangen als wir eben genommen haben.

Da das System der Gleichungen (A′), (B′) bis auf die Verschiedenheit der Zeichen mit dem durch (A) und (B) bezeichneten völlig einerley ist, so ist man berechtigt zu schließen, daß wenn der Punct M eine Curve durchläuft, der Punct m eine ähnliche beschreibt, deren Verhältniß zur ersten wie a′ : a ist. Es ist überdieß offenbar, daß diese Gleichungen verbunden mit der Gleichung der von einem der Puncte m, M″, M durchlaufenen Curve, zur Bestimmung der Natur der von den beyden andern Puncten beschriebenen Curven hinreichen werden; denn wegen der sechs unbekannten X, Y, x, y, X″, Y″ und der Existenz von fünf Gleichungen, gelangt man immer durch die Elimination zu einer Gleichung zwischen zweyen der unbekannten, welche man betrachtet.

Wir wollen zum Beyspiel annehmen, der Punct M durchlaufe eine durch die Gleichung $Y = o$ gegebene Gerade (diese ist bekanntlich die Axe der Abcissen selbst); man soll die Curve bestimmen, welche der Punct M″ in eben der Zeit beschreibt.

Die Gleichungen (A), (B), welche sich auf die Bewegung des Punctes M beziehen, werden, wenn man darin $Y = o$ setzt

$$(a - a')\,X = 2aX''$$
$$(a'X + aX'')^2 + a^2Y''^2 = a^2\,(a + a')^2;$$

und eliminirt man X aus der zweyten, indem man darin ihren aus der ersten genommenen Werth setzt, so wird man haben

$$a^2Y''^2 + \left(aX'' + \frac{2aa'X''}{a - a'}\right)^2 = a^2\,(a + a')^2,$$

woraus man für die Gleichung der durch den Punct M″ beschriebenen Ellipse zieht,

$$Y''^2 + \left(\frac{a + a'}{a - a'}\right)^2 X''^2 = (a + a')^2.$$

Setzt man in dieser Gleichung $Y'' = o$, so erhält man den Ausdruck für die auf AX genommene kleine Halbaxe der Ellipse; setzt man im Gegentheile $x = o$, so erhält man den Ausdruck der auf AY genommenen großen Halbaxe. Im ersten Falle hat man

$$X = a - a'$$

und im zweyten

$$Y = a + a'.$$

Hieraus folgt, daß man, wenn zwey Axen m, n

einer Ellipse gegeben sind, die Länge zweyer Liniale von der Art finden kann, daß, indem der Punct M eine Gerade durchläuft, der Punct M″ zugleich die verlangte Ellipse beschreibt. In der That würde man haben

$$m = 2(a + a'),\quad n = 2(a - a'),$$

und folglich

$$a = \frac{m + n}{2},\quad a' = \frac{m - n}{2}.$$

Dieses sehr einfache Mittel, eine Ellipse durch eine stetige Bewegung zu beschreiben, ist weit bequemer als das, welches darin besteht, diese Curve durch einen der Puncte eines Lineals zu ziehen, dessen äußersten Puncte unterworfen sind, sich längs zweyer andern Liniale zu bewegen, welche mit einander irgend einen Winkel bilden.

## §. 64.

Man könnte noch durch besondre Betrachtungen die Gleichung der vom Puncte M″ beschriebenen Curve erhalten, wenn der Punct M eine Gerade durchläuft, und hierzu führt uns folgende Analysis.

Es seyen $x''$, $y''$ die Coordinaten von m″ und wir wollen überdieß dieselbe Construction und dieselbe Beziehung wie im Vorhergehenden annehmen, indem wir ferner $M'm'' = M'M'' = a''$ setzen.

Dieses vorausgesetzt, hat man, da das Dreyeck AM′M gleichschenklicht ist, $AP' = PM$, und $AP'' = p''M$.

Andrerseits wird man, da die Curve CM'B offenbar ein Kreis ist, dessen Halbmesser AM' ist, zwischen den Coordinaten des Punctes M' diese Beziehung haben

$$X'^2 + Y'^2 = a^2 \quad (m);$$

und da der Sinus des Winkels M'MA $= \frac{Y''}{a + a''} = \frac{Y'}{a}$, woraus $Y' = \frac{Y''a}{a + a'}$ erfolgt, weil ferner dessen Cosinus $= \frac{X'}{a} = \frac{X''}{a - a'}$, woraus $X' = \frac{aX''}{a - a'}$ erfolgt, so wird die Gleichung (m) werden

$$\frac{a^2X''^2}{(a - a')^2} + \frac{a^2Y''^2}{(a + a')^2} = a^2;$$

oder wie oben

$$Y''^2 + \frac{(a + a')^2}{(a - a')^2} X''^2 = (a + a')^2.$$

Es kann nicht schwer seyn zu beweisen, daß, wie auch der Winkel AM'M beschaffen seyn mag, die Länge der Geraden MN immer gleich 2 a ist.

Die jungen Meßkünstler, welche topographische Zeichnungen anfertigen, werden ohne Zweifel mit Vergnügen bemerken, daß die eben aufgelöste Aufgabe unausschließlich die ganze Theorie des Pantographs umfaßt. Die Beschaffenheit und die Gränzen des gegenwärtigen Werks erlauben uns nicht, uns mehr über diese Betrachtungen auszulassen. Wir werden indessen bey einer andern Gelegenheit auf diesen Gegenstand zurückkommen.

## Aufgabe.

### §. 65.

Durch mehrere gegebene Puncte eine Curve zu führen.

Es seyen Fig. 49.

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}\alpha''\\ \beta''\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}\alpha'''\\ \beta'''\end{matrix}\right\} \text{ u. s. w.}$$

die respectiven Coordinaten der gegebenen Puncte

M, M′, M″, M‴,

## Auflösung.

Es ist klar, daß weil der Vortrag der Aufgabe keinesweges die Art der Curve angiebt, welche durch die gegebenen Puncte gehen soll, man nach Belieben so viele Auflösungen als man will geben kann, indem man von den Curven Gebeauch macht, welche entweder durch Gleichungen ausgedrückt werden können oder nicht; um uns aber an den am leichtesten anzubringenden Auflösungen zu halten, wollen wir mit Lagrange bemerken: „daß, obgleich der Kreis nach der geraden Linie die am „leichtesten zu beschreibende Curve ist, er es dennoch „nicht in Ansehung seiner Gleichung zwischen den recht„winklichten Coordinaten ist. Aus diesem Gesichts„puncte kann man diejenigen Curven als die leichtesten „ansehen, deren Gleichung durch eine ganze rationale „Function der Abcisse, wie

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots$$

„ausgedrückt ist. Diese Arten Curven werden über„haupt parabolische genannt, weil man sie als eine „Verallgemeinerung der Parabel ansehen kann, welche „statt findet, wenn die Gleichung nur die drey ersten „Glieder hat. Man hat schon den Gebrauch derselben „in der Theorie der Zerlegung der Gleichungen gesehen „(§. 160. L. C.), und ihre Betrachtung ist immer bey „der Gradation der Curven nützlich; denn man kann „immer eine Curve dieser Art durch so viele Puncte ei„ner vorgelegten Curve als man will gehen lassen, in„dem man nur nöthig hat, so viele unbestimmte Coeffi„cienten A, B, C, D . . . . . zu nehmen, als man „Puncte betrachtet, und diese Coefficienten dergestalt zu „bestimmen, daß die Abcissen und Ordinaten dieser Puncte „gegeben wären. Nun ist klar, daß, die vorgelegte „Curve mag seyn, welche sie wolle, die auf diese Art „gezogene parabolische Curve von derselben um desto „weniger unterschieden seyn wird, je größer die An„zahl der gegebenen Puncte, und je kleiner ihr Abstand „ist."

In der That hat man in dem gegenwärtigen Umstande zwischen den Coordinaten der Puncte M, M′, M″, M‴, welche zur parabolischen Curve gehören, die Beziehungen:

$$\beta = A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + \ldots.$$
$$\beta' = A + B\alpha' + C\alpha'^2 + D\alpha'^3 + \ldots.$$
$$\beta'' = A + B\alpha'' + C\alpha''^2 + D\alpha''^3 + \ldots.$$
$$\beta''' = A + B\alpha''' + C\alpha'''^2 + D\alpha'''^3 + \ldots.$$

aus denen man durch die gewöhnliche Elimination vom ersten Grade, die Werthe der Coefficienten A, B, C, D .... bestimmen kann; aber diese Werthe werden mit noch mehrerer Leichtigkeit durch folgendes Verfahren erhalten.

Zieht man in den vorhergehenden Gleichungen die eine von der andern ab, so wird man haben

$$\beta' - \beta = B(\alpha' - \alpha) + C(\alpha'^2 - \alpha^2) + D(\alpha'^3 - \alpha^3) + \ldots$$

$$\beta'' - \beta' = B(\alpha'' - \alpha') + C(\alpha''^2 - \alpha'^2) + D(\alpha''^3 - \alpha'^3) + \ldots$$

$$\beta''' - \beta'' = B(\alpha''' - \alpha'') + C(\alpha'''^2 - \alpha''^2) + D(\alpha'''^3 - \alpha''^3) + \ldots$$

Da diese Reste respectiv durch $\alpha' - \alpha$, $\alpha'' - \alpha'$, $\alpha''' - \alpha''$ theilbar sind, so erhält man zu Quotienten

$$(Q)\begin{cases} \dfrac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = B + C(\alpha' + \alpha) + D(\alpha'^2 + \alpha'\alpha + \alpha^2) + \ldots \\[2ex] \dfrac{\beta'' - \beta'}{\alpha'' - \alpha'} = B + C(\alpha'' + \alpha') + D(\alpha''^2 + \alpha''\alpha' + \alpha'^2) + \ldots \end{cases}$$

$$\frac{\beta''' - \beta''}{\alpha''' - \alpha''} = B + C(\alpha''' + \alpha'') + D(\alpha'''^2 + \alpha'''\alpha'' + \alpha''^2) + \ldots$$

Die Werthe der Brüche, welche die ersten Theile dieser Gleichungen ausmachen, sind bekannt. Es seyen daher zur Abkürzung

$$\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = \gamma, \quad \frac{\beta'' - \beta'}{\alpha'' - \alpha'} = \gamma', \quad \frac{\beta''' - \beta''}{\alpha''' - \alpha''} = \gamma'' \ldots\ldots$$

Man wird auf diese Art finden

$$(Q')\,\frac{\gamma'-\gamma}{\alpha''-\alpha}=C+D\,(\alpha''+\alpha'+\alpha)\,.\,.\,.\,.\,.$$

$$\frac{\gamma''-\gamma'}{\alpha'''-\alpha'}=C+D\,(\alpha'''+\alpha''+\alpha')\,.\,.\,.\,.\,.$$

Es sey eben so zur Abkürzung

$$\frac{\gamma'-\gamma}{\alpha''-\alpha}=\delta,\quad \frac{\gamma''-\gamma'}{\alpha'''-\alpha'}=\delta'\,.\,.\,.\,.\,.$$

so wird man finden

$$\frac{\delta'-\delta}{\alpha'''-\alpha}=D\,.\,.\,.\,.\ \text{und so fort.}$$

Man sieht hieraus, daß die Werthe der Coefficienten A, B, C, D . . . . erhalten werden, wenn man von diesen letztern ausgeht. Um von dieser Bestimmung ein Beyspiel zu geben, wollen wir annehmen, daß die vorhergehende Gleichung mit $\frac{\gamma'-\gamma}{\alpha''-\alpha}=C$ beendigt sey, oder, welches dasselbe ist, daß man nur drey gegebene Puncte M, M′, M″ habe, in welchem Falle die vorgelegte Gleichung seyn wird

$$y=A+Bx+Cx^2,$$

und die Quotienten (Q), (Q′) werden sich reduciren auf

$$\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}=B+C\,(\alpha'+\alpha)=\gamma\,.\,.\,.\,.\,(1);$$

$$\frac{\beta''-\beta'}{\alpha''-\alpha'}=B+C\,(\alpha''+\alpha')=\gamma'\,.\,.\,.\,.\,.$$

$$\frac{\gamma'-\gamma}{\alpha''-\alpha}=C=\delta$$

Substituirt man den Werth von C in die Gleichung (1), so wird man haben,

$$B = \gamma - \delta\alpha' - \delta\alpha.$$

Substituirt man ebenfalls die Werthe von C und von B in die Gleichung

$$\beta = A + B\alpha + C\alpha^2,$$

so erhält man, nachdem reducirt worden

$$A = \beta - \gamma\alpha - \delta\alpha\alpha';$$

setzt man nun diese Werthe von A, B, C in die vorgelegte Gleichung, so wird kommen

$$y = \beta + \gamma(x - \alpha) + \delta(x - \alpha)(x - \alpha').$$

Derselbe Rechnungskunstgriff bey der Bestimmung einer größern Anzahl Coefficienten angewandt, würde auf diese weit ausgedehntere Formel führen, deren Gesetz leicht abzunehmen ist

$$y = \beta + \gamma(x - \alpha) + \delta(x - \alpha)(x - \alpha') + \varepsilon(x - \alpha)(x - \alpha')(x - \alpha'')\ldots$$

Lagrange, welcher diese Auflösung nach Newton beybringt, bemerkt, daß man durch folgende Betrachtung zu einem höhern Grad von Einfachheit gelangen kann.

„Weil, fährt dieser berühmte Geometer fort, y in „$\beta$, $\beta'$, $\beta''$ übergehen muß, wenn x die Werthe $\alpha$, $\alpha'$, „$\alpha''$ .... annimmt, so ist leicht einzusehen, daß der „Ausdruck von y diese Form haben wird,

$$y = A'\beta + B'\beta' + C'\beta'' + \ldots.$$

„wo die Größen A', B', C' dergestallt in x ausgedrückt

„werden müssen, daß man, wenn $x = \alpha$ gesetzt wird, $A' = 1$, $B' = 0$, $C' = 0$ habe; desgleichen daß man, „wenn $x = \alpha'$ gesetzt wird $A' = 0$, $B' = 1$, $C' = 0$ ... „daß man ferner, wenn $x = \alpha''$ gemacht wird, eben so „$A' = 0$, $B' = 0$, $C' = 1$ .... habe und so fort; wor„aus leicht zu schließen ist, daß die Werthe von $A'$, $B'$, $C'$ diese Form haben müssen

$$A' = \frac{(x-\alpha')(x-\alpha'')(x-\alpha''')}{(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')(\alpha-\alpha''')} \ldots .$$

$$B' = \frac{(x-\alpha)(x-\alpha'')(x-\alpha''')}{(\alpha'-\alpha)(\alpha-\alpha'')(\alpha'-\alpha''')} \ldots .$$

$$C' = \frac{(x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha''')}{(\alpha''-\alpha)(\alpha''-\alpha')(\alpha''-\alpha''')} \ldots .$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

„indem man in den Zählern und Nennern so viele Fac„toren nimmt, als die Anzahl der gegebenen Puncte der „Curve ist, weniger eins."

„Dieser letztere Ausdruck von y, obgleich unter ei„ner vom ersten verschiedenen Form, kommt doch auf „denselben zurück, wovon man sich durch den Calcul „überzeugen kann, wenn man die Werthe $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ .... „entwickelt, und die Glieder nach den Größen $\beta$, $\beta'$, „$\beta''$ .... ordnet; er ist indessen wegen der Einfachheit „der Analysis, auf welcher er gegründet ist, und selbst „durch seine Form, die für den Calcul bequemer ist, vor„zuziehen. Hieraus folgt, daß man in irgend einer aus „mehrern Gliedern zusammengesetzten Reihe so viele da„zwischen liegende Glieder als man will geometrisch con„struiren kann; welches sehr nützlich ist die Lücken aus-

„zufüllen, die sich in Reihen von Beobachtungen oder „Versuchen, oder in den nach Formeln berechneten Ta„feln oder in gegebenen Constructionen finden könnten,“ und hierin besteht die Interpolationsmethode.

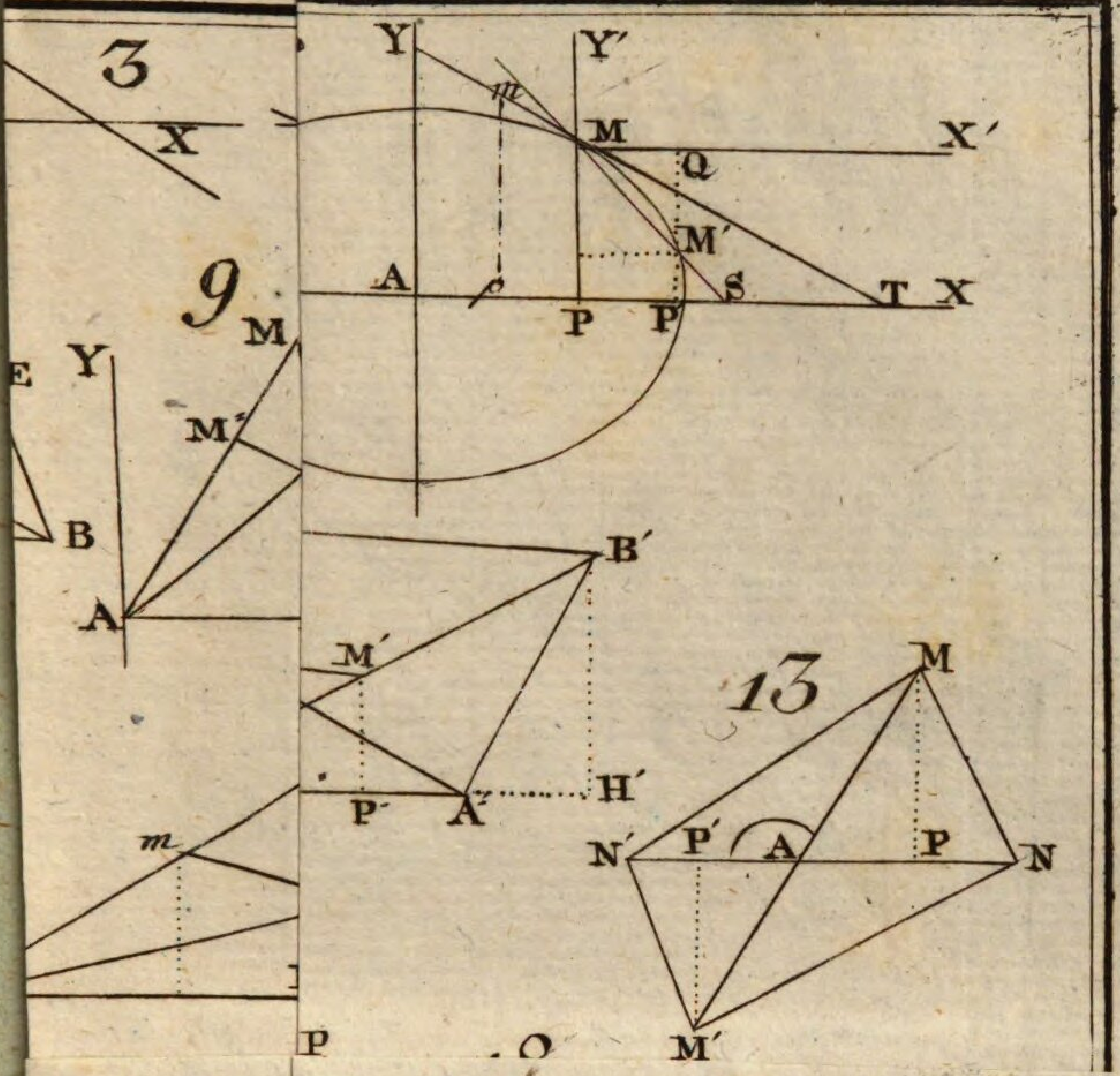
Wir wollen uns nicht mehr bey der Auflösung der Aufgaben der Geometrie aufhalten; was wir davon gesagt haben, ist hinreichend den Lesern zu beweisen, daß man sich vorzugsweise an den allgemeinen Methoden zu halten habe. In der That, sagt Laplace, sind sie, wenn sie unter der einfachsten Form dargestellt sind, fast immer die leichtesten. Diejenigen, welche zum Studium der Sterotomie nach Monge übergehen wollen, können versuchen, einige der vorhergehenden Aufgaben, welche ihre analoge im Raume haben, zu verallgemeinern und aufzulösen; und alsdann haben sie sich vorzüglich an der Gründlichkeit der Analysis und der Einförmigkeit ihres Ganges zu halten.

Ende.

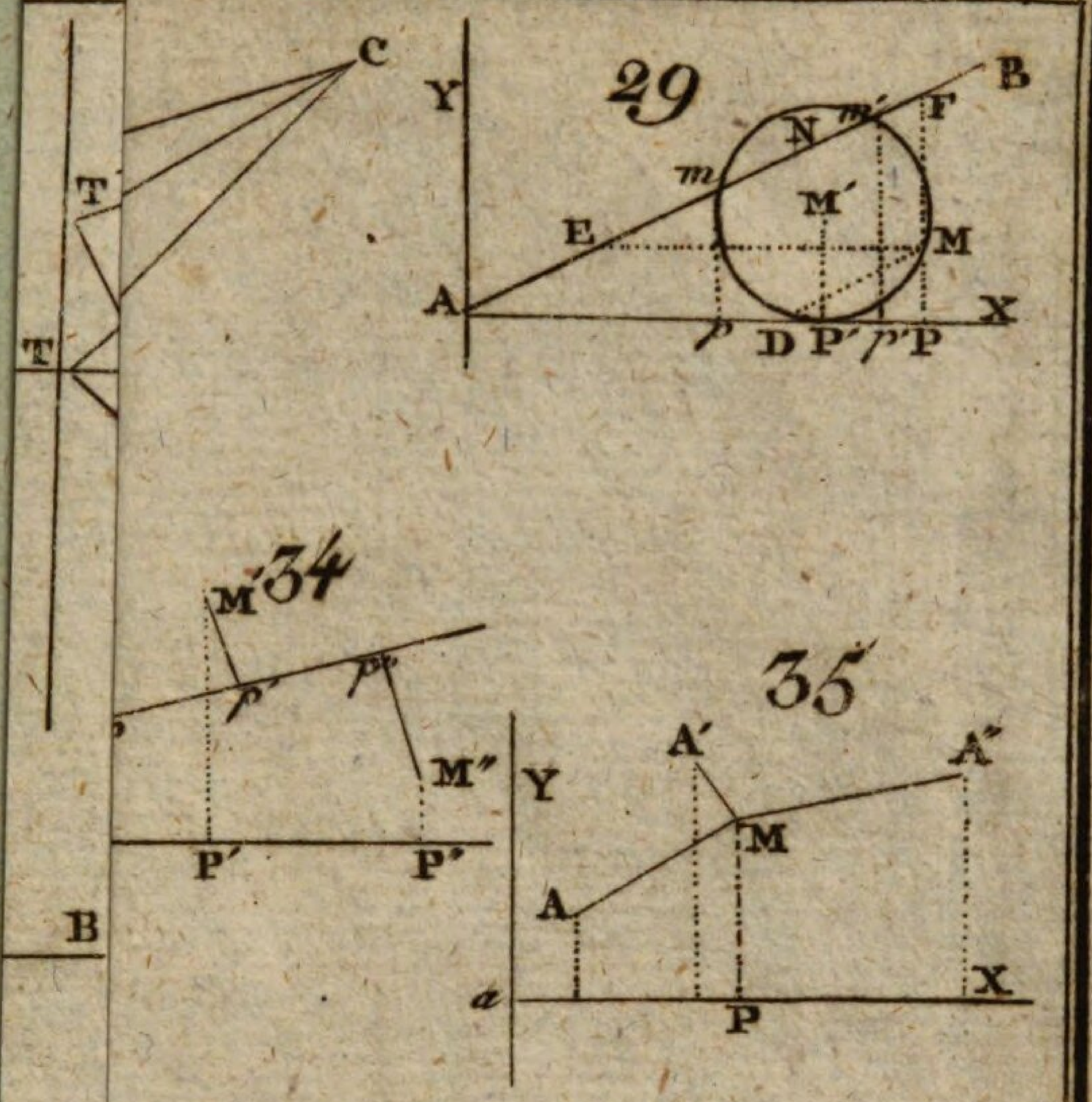
Kern-Kernried'sche
Stiftungsbibliothek
- Augsburg -

# Druckfehler.

Seite 2 Zeile 1 von unten statt §. 79. lies §. 95.
— 6 — 1 — — st. analystischen l. analytischen
— 15 — 16 st. dur l. durch
— 16 — 12 st. n l. n'
— 16 — 21 st. 2y l. 2y'
— 35 — 10 st. bekannte l. unbekannte
— 38 — 9 st. $\alpha r'$ l. $\pm\, \alpha r'$
— 44 — 12 st. den Entfernungen l. der Entfernung
— 71 — 15 st. $\alpha t$ l. at


3
X
Y
Y′
m
M
X′
Q
M′
A
p
S
T
X
P
P
9
M
E
Y
M″
B
A
B′
M′
P′
A′
H′
13
M
P′
A
P
N′
N
M′
m
P
O

…ühr. d. Trigonometrie Taf II



8° KK
Pouissant

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Pouissant, Louis

Sammlung verschiedener Aufgaben der Geometrie aufgelöst und bewiesen durch die algebraische Analysis ; als weitere Ausführung zu Lacroix's Trigonometrie und höhern Geometrie

Berlin 1806

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- K-K 479
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11255134-5